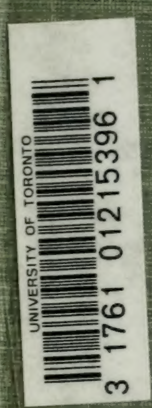
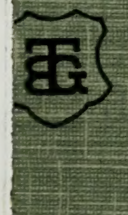
A. HOCHHEIM



AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

II

A: AUFGABEN



Von dem Verfasser sind ferner erschienen:

Im Verlage von **B. G. Teubner**, Leipzig:

Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. In je 2 Teilen (Aufgaben und Auflösungen). gr. 8.

Heft I. **Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis.** 3., verm. Auflage. 1904.
— II. **Die Kegelschnitte.** Abteilung I. 2., vom Verfasser selbst noch bearbeitete Auflage. 1898.
— III. **Die Kegelschnitte.** Abteilung II. 1886.

Im Verlage von **E. S. Mittler & Sohn**, Berlin:

Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra. I. Heft. 6. Aufl. ed. F. Hochheim. 1900. — II. Heft. 2. Aufl. 1884.

Bei **C. Schmidt**, Halle a. S.:

De genere quodam curvarum orthogonalium. gr. 4. 1864.

Im Verlage von **L. Nebert**, Halle a. S.:

Die Differentialkurven der Kegelschnitte. gr. 8. 1874.

Pole und Polaren der parabolischen Kurven 3. Ordnung. gr. 4. 1875.

Al Kâfî fîl Hisâb (Genügendes über Arithmetik) des **Abu Bekr Muhammed Ben Alhusein Alkarkhî** nach der auf der Herzoglich-Gothaischen Schloßbibliothek befindlichen Handschrift. gr. 4. In 3 Heften. 1878—1880.

Als Programmabhandlungen der Guerickeschule in Magdeburg:

Otto von Guericke als Physiker. gr. 4. 1870.

Über die windschiefe Fläche $z = Ry^3x$. gr. 4. 1873.

In Grunerts Archiv für Mathematik und Physik:

Über einige Kurven höheren Grades.

Ein Problem aus der Optik (Problem des Alhazen).

Über eine Brechungskurve.

Über den fünften merkwürdigen Punkt.

Über die windschiefe Fläche $z = My^2x$.

Über die windschiefe Fläche $z = A\frac{y^2}{x^2}$.

Über die gemischte Polokonik zweier Geraden bezüglich der Differentialkurve der Parabel.

Über die Brennpunkte der Differentialkurve der Parabel.

Über die reziproke Polare der Differentialkurve der Parabel in bezug auf einen Kreis.

Über figurierte Zahlen.

In Schlömilchs Zeitschrift für Mathematik und Physik:

Über die geometrischen Örter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Tangentialkurven der Kegelschnitte.

Über die Polarflächen der windschiefen Flächen 3. Ordnung.

In den Jahrbüchern des naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg:

Die geometrische Reihe 2. Ordnung in 2 Teilen (1886 u. 1887).

In der Zeitschr. der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft:

Die Astronomie des Mahmûd ibn Muhammed ibn ʿOmar al Ǵagmînî von G. Rudloff u. Ad. Hochheim (1893).

Von dem Herausgeber erschien im Verlage von **B. G. Teubner**, Leipzig:

Über eine Art der Erzeugung der Kurven 3. Klasse mit einer Doppeltangente. gr. 8. 1899.



AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

PROFESSOR DR. ADOLF HOCHHEIM,

WEIL. KÖNIGL. PROVINZIAL-SCHULRAT ZU BERLIN.

HEFT II. a

DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG I.

ZWEITE, VOM VERFASSER SELBST NOCH BEARBEITETE AUFLAGE.

A. AUFGABEN.

BG

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1899.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Rücksicht auf die Bedürfnisse der preußischen Realgymnasien und Ober-Realschulen, an denen die analytische Behandlung der Kegelschnitte nach den Lehrplänen vom 11. März 1882 obligatorisch ist, bestimmt den Unterzeichneten, die Aufgaben, welche die Kegelschnitte betreffen, in zwei voneinander getrennten Abteilungen erscheinen zu lassen. Die erste hier vorliegende Abteilung enthält die einfacheren Aufgaben, welche dem Standpunkte jener Schulen angemessen sind, während in der zweiten Probleme aus der projektivischen Geometrie, sowie aus der Behandlung der Kegelschnitte mit Hilfe trimetrischer Koordinaten dem Studierenden zur Bearbeitung dargeboten werden.

Magdeburg, im Februar 1883.

Ad. Hochheim.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Anordnung des Stoffes ist wie bei der 2. Auflage des 1. Heftes auch bei der Neuauflegung des 2. Heftes dieselbe geblieben. Dem bisherigen Material sind noch einige 50 neue Aufgaben hinzugefügt worden, welche fast durchweg vom Verfasser selbst zusammengestellt sind. Die Auswahl derselben erfolgte auch bei dieser Neubearbeitung nach dem Prinzip, daß die Aufgaben für Primaner einer Realanstalt noch lösbar sind.

Etwaige Wünsche betreffs Vermehrung und Verbesserung des Materials bei künftigen Auflagen bittet der Unterzeichnete ihm durch Vermittelung der Verlagsbuchhandlung zugehen zu lassen.

Gardelegen, im Oktober 1898.

Franz Hochheim.

Inhaltsverzeichnis.

Die Parabel.

Die Ellipse.

Die Hyperbel.

Die Kurven zweiten Grades.

Die Parabel.

Die Gleichung der Parabel.

1. Es soll der geometrische Ort eines Punktes P bestimmt werden, der von der Geraden $x = -\frac{p}{4}$ und dem Punkte $\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ gleich weit entfernt ist. Welches ist die Gleichung desselben?

2. Die Achse einer Parabel fällt mit dem positiven Teile der X-Achse zusammen, der Scheitel mit dem Koordinatenanfangspunkte. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel derselben gleich $4\frac{1}{4}$ ist?

3. Die Koordinaten des Scheitels einer Parabel sind a, b, der Parameter derselben gleich p. Welches ist die Gleichung, wenn die Achse der X-Achse parallel läuft?

Beispiel. $a = 5, \quad b = -3, \quad p = 5\frac{1}{2}$.

4. Die Achse einer Parabel ist $y = -7$, die Abscisse des Scheitels $x_1 = 3$, die Koordinaten eines Punktes der Kurve $x_2 = 4$, $y_2 = -5$. Welches ist die Gleichung derselben?

5. Die Gleichung einer Parabel ist $112y^2 - 392y - 96x + 151 = 0$. Wie groß ist der Parameter derselben? Welches sind die Koordinaten des Scheitels? Welches sind die Koordinaten des Brennpunktes?

6. Was wird aus der Parabel $y^2 = px$, wenn man p bis zu Null abnehmen läßt?

7. In welcher Beziehung stehen Parabeln von gleichem Parameter?

8. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = px$ ist die Ordinate gleich dem q-fachen der Abscisse?

Beispiele. a) $y^2 = 9x, \quad q = 5$;
b) $y^2 = 17x, \quad q = \frac{1}{2}$.

9. Welches ist die Gleichung eines Brennstrahles der Parabel $y^2 = 5x$, wenn die Abscisse des Endpunktes $x_1 = 9$ ist? Wie weit ist der Endpunkt desselben von der Direktrix entfernt?

10. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 10x$. Welches ist die Gleichung derselben für ein Achsensystem, dessen Koordinatenwinkel 45^0 beträgt, wenn die X-Achse des neuen Systems mit der des ursprünglichen zusammenfällt?

11. Welches ist die Polargleichung einer Parabel mit dem Parameter p, wenn die Achse derselben als die feste Achse des Koordinatensystems, der Brennpunkt aber als Pol angesehen wird?

12. Für welche Anomalie ist der Radiusvektor einer Parabel gleich dem Parameter derselben? Für welchen Wert von ϑ besitzt der Radiusvektor einen Minimalwert?

13. Die Polargleichung einer Parabel ist $\varrho = \frac{3}{1 - \cos\vartheta}$. Welcher Wert ergiebt sich für ϱ, wenn a) $\angle\vartheta = 45^0$, b) $\angle\vartheta = 60^0$ gesetzt wird?

14. Wie lang ist eine Brennpunktsehne der Parabel $\varrho = \frac{p}{2(1 - \cos\vartheta)}$, wenn dieselbe unter dem Winkel φ gegen die Achse der Parabel geneigt ist?

Beispiel. $\varrho = \frac{7}{1 - \cos\varphi}$, $\angle\varphi = 20^0$.

15. Durch den Brennpunkt einer Parabel ist eine Sehne gezogen. Wie groß ist das Rechteck aus den Abschnitten derselben?

16. Von den Endpunkten einer Brennpunktsehne der Parabel $\varrho = \frac{p}{2(1 - \cos\vartheta)}$ sind Lote auf die Achse derselben gefällt. Wie groß ist das Rechteck aus den beiden Loten?

Die Parabel und die Gerade.

17. Welches sind die Koordinaten der Punkte, in denen die Parabel $y^2 = px$ von der Geraden $y = Mx + n$ geschnitten wird?

Beispiele. a) $y^2 = 9x$, $7y - 3x - 30 = 0$;

b) $y^2 = 3x$, $4y - x - 12 = 0$;

c) $y^2 = 11x$, $\frac{y}{12} + \frac{x}{5} + 1 = 0$.

18. Welches ist die geometrische Bedeutung der Relation $\frac{p}{4} \gtreqless Mn$?

19. In welchen Punkten wird die Parabel $y^2 = px$ von der Geraden $y = n$ geschnitten?

20. Welcher Bedingung müssen die Koordinaten einer geraden Linie (u, v) genügen, wenn dieselbe eine Parabel berühren soll, deren Achse mit der Abscissenachse zusammenfällt und deren Brennpunkt der Gleichung $\frac{p}{4} u + 1 = 0$ entspricht? Welches ist demnach die Gleichung dieser Parabel in Linienkoordinaten?

21. Die Gleichung einer Parabel sei in Punktkoordinaten $(y - b)^2 = p(x - a)$. Welche Gestalt besitzt die Gleichung derselben Kurve in Linienkoordinaten?

22. Von einem Punkte P sind nach einer Geraden g Strahlen gezogen und auf jedem derselben im Endpunkte ein Lot errichtet. Welche Kurve umhüllt diese Lote? (Linienkoordinaten.)

23. Gegeben sei ein Punkt P und eine Gerade g. Von dem Punkte P seien nach der Geraden g Strahlen gezogen, jeder der Strahlen sei halbiert und auf ihm im Halbierungspunkt ein Lot errichtet. Welche Kurve hüllt die Lote ein?

24. Von einem Punkte P seien nach einer Geraden g Strahlen gezogen und die Winkel, welche die Strahlen mit g einschließen, halbiert. Welches ist die Gleichung der Enveloppe der Halbierungslinien?

25. Die Punkte der Peripherie des Kreises $y^2 + rx + x^2 = 0$ mögen als Pole bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ betrachtet werden. Welches ist die Enveloppe der zugehörigen Polaren?

26. In die Parabel $y^2 = 11x$ ist ein gleichseitiges Dreieck eingezeichnet, dessen eine Spitze im Scheitel derselben liegt. Wie lang ist jede der Seiten? Wie groß ist die Höhe?

27. Durch zwei Punkte der Parabel $y^2 = 8x$, nämlich $x_1 = 2$, $y_1 > 0$ und $x_2 = 18$, $y_2 < 0$, ist eine Gerade gelegt. Welches ist die Gleichung dieser Sekante?

28. Durch den Punkt (x_1, y_1) ist eine Sehne in die Parabel $y^2 = px$ zu legen, welche in diesem Punkte halbiert wird. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiel. $y^2 = 7x$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$.

29. In welchen Punkten wird die Parabel

$$y^2 - 10y - 6x + 15 = 0$$

von der Geraden $3y + 4x - 12 = 0$ geschnitten? Wie weit ist der Brennpunkt der Parabel von der Geraden entfernt?

30. Welches ist die Gleichung einer Parabel, die von der Y-Achse berührt wird und die X-Achse in dem Punkte $(12, 0)$ schneidet, vorausgesetzt daß die Achse derselben der X-Achse parallel läuft und der Parameter gleich 3 ist?

31. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die sich vom Koordinatenanfangspunkte an die Parabel $(y - \beta)^2 = p(x - \alpha)$ ziehen lassen?

Beispiel. $y^2 - 12y - 3x + 84 = 0$.

Tangente und Normale der Parabel.

32. An die Parabel $y^2 = px$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele. a) $y^2 = 5x, \quad x_1 = 20, \quad y_1 = 10;$

b) $y^2 = \frac{7}{2}x, \quad x_1 = 1\frac{1}{7}, \quad y_1 < 0.$

33. Im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = px$ sei die Normale konstruiert. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiel. $y^2 = 9x, \quad x_1 = 25, \quad y_1 = -15.$

34. Gegeben ist die Parabel

$$y^2 - 6y - 8x - 63 = 0.$$

Es sollen die Gleichungen derjenigen Tangenten gefunden werden, deren Berührungspunkte die Abscisse $x_1 = -1$ haben. Unter welchen Winkeln sind diese Tangenten gegen die X-Achse geneigt? Welches sind die Gleichungen der zugehörigen Normalen?

35. Es soll die Gleichung einer Parabel bestimmt werden, die von der Geraden $Lx + My + N = 0$ berührt wird. Die Achse der Kurve möge mit der X-Achse zusammenfallen, und der Scheitel besitze die Koordinaten a, 0.

Beispiel. $9x - 4y + 7 = 0, \quad a = 6.$

36. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und ein Punkt (x_1, y_1) derselben. Wie lang ist die Tangente, die in diesem Punkte die Parabel berührt? Wie lang ist die Normale? Wie lang die Subtangente? Wie lang die Subnormale?

Beispiel. $y^2 = 10x, \quad x_1 = 7, \quad y_1 > 0.$

37. Gegeben ist eine Parabel und auf derselben der Punkt P. Tangente und Normale an diesem Punkte der Kurve sind durch Konstruktion zu finden.

38. In welchem Verhältnis teilt der Brennpunkt einer Parabel den Abstand der beiden Punkte, in welchen die Achse von einer Tangente und der zugehörigen Normale geschnitten wird?

39. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = px$ ist die Tangente gegen die Achse unter dem Winkel φ geneigt?

Beispiele. a) $y^2 = 15x$, $\angle \varphi = 45^0$;
b) $y^2 = 11x$, $\angle \varphi = 120^0$.

40. Von welchem Punkte der Achse einer Parabel $y^2 = px$ lässt sich an dieselbe eine Tangente legen, deren Neigungswinkel gegen die X-Achse 30^0 beträgt? Welches ist die Gleichung derselben?

41. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. a) Für welchen Punkt derselben ist die Tangente gleich dem Parameter? b) Für welchen Punkt ist die Tangente 4 mal so groß als die Abscisse des Berührungspunktes?

42. Für welchen Punkt der Parabel $y^2 = px$ ist die Normale doppelt so lang als die Subtangente? Welchen Winkel schließt in diesem Falle die Normale mit der X-Achse ein?

43. An die Parabel $y^2 = px$ ist eine Tangente zu legen, so daß das Rechteck aus dieser und der zugehörigen Normale gleich dem doppelten Quadrate der Ordinate ist. Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes? Unter welchem Winkel schneidet die Tangente die X-Achse?

44. Es sollen die Koordinaten eines Punktes der Parabel gesucht werden, für welchen die Normale gleich der Differenz zwischen der Subtangente und der Subnormale ist.

45. Es ist zu zeigen, daß die Tangente mit dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahle und mit der Achse gleiche Winkel einschließt.

46. Von dem Brennpunkte einer Parabel sind Lote auf die Tangenten gefällt. a) Auf welcher Linie liegen die Fußpunkte der Lote? b) Wenn jedes Lot über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert wird, wo liegen die Endpunkte der Verlängerungen (Gegenpunkte des Brennpunktes bezüglich der Tangenten)?

47. Die im Punkte (x_1, y_1) an die Parabel $y^2 = px$ gelegte Tangente schneide die Scheiteltangente in Q. In Q sei ein Lot auf der Tangente errichtet, welches die durch (x_1, y_1) gezogene Parallele zur Achse in P treffen möge. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

48. Von dem Punkte P einer Tangente der Parabel $y^2 = px$ ist eine Gerade nach dem Brennpunkte gezogen und eine zweite nach dem Fußpunkte des vom Berührungspunkte auf die Direktrix gefällten Lotes. In welcher Beziehung stehen diese beiden Linien?

49. Es soll der geometrische Ort des Schnittpunktes einer Tangente der Parabel mit dem Lote bestimmt werden, welches im Brennpunkte auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahle errichtet ist.

50. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und die Gerade $y = Mx + n$. Es soll eine Tangente an die Parabel gelegt werden, welche der gegebenen Geraden parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben? Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes?

Beispiel. $y^2 = 5x, \quad 3x - 2y + 7 = 0$.

51. Welche Tangente der Parabel $y^2 = px$ ist gegen die Gerade $y = Mx + n$ unter dem Winkel φ geneigt? Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes?

Beispiel. $y^2 = 12x, \quad y = 3x - 4, \quad \angle \varphi = 45^0$.

52. Von einem gegebenen Punkte P ist an eine Parabel eine Tangente zu legen. Für welche Lage des Punktes P läßt sich keine reelle Tangente konstruieren?

53. Es ist nachzuweisen, in welchem Verhältnis der Abstand des Brennpunktes der Parabel von einer Tangente zu der zugehörigen Normale steht.

54. Auf der Parabel $y^2 = px$ gleiten zwei Tangenten fort, welche sich rechtwinklig durchschneiden. Welches ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes derselben?

55. An die Parabel $y^2 = px$ sind zwei Tangenten gelegt, welche aufeinander lotrecht stehen. Wie groß ist das Rechteck aus den zugehörigen Subtangenten?

56. In den Endpunkten einer beliebigen Brennpunktsehne sind Tangenten an die Parabel gelegt. Unter welchem Winkel schneiden sich dieselben?

57. Von dem Brennpunkte der Parabel $y^2 = px$ sind Strahlen nach allen Tangenten derselben unter dem konstanten Winkel φ gezogen. Welches ist der geometrische Ort der Schnittpunkte?

58. In den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind zwei Tangenten an die Parabel $y^2 = px$ gelegt. Welches ist die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt der Tangenten mit dem Brenn-

punkte verbindet? Es ist zu zeigen, daß diese Gerade den Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen bilden, halbiert.

59. An die Parabel $y^2 = 3\frac{1}{2}x$ sind zwei Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte $x_1 = \frac{8}{7}$, $y_1 > 0$, $x_2 = 14$, $y_2 < 0$ sind. Welches sind die Koordinaten des Schnittpunktes derselben? Welchen Winkel schließen beide miteinander ein?

60. An die Parabel $y^2 = px$ sind Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind. Es ist das Verhältnis zu bestimmen zwischen dem Winkel, den die Tangenten einschließen, und dem Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen bilden.

61. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. In den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind Tangenten an dieselbe gelegt. Es ist zu zeigen, daß die Quadrate der Tangenten, gerechnet von ihrem Schnittpunkte bis zu den Berührungspunkten, sich verhalten wie die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen.

62. An eine Parabel sind in den Punkten B und C Tangenten gelegt, welche sich im Punkte A durchschneiden. Eine dritte Tangente berührt die Parabel im Punkte L und schneidet die beiden ersten Tangenten in G und H. Es ist nachzuweisen, daß die Strecke GH vom Brennpunkte aus gesehen unter einem konstanten Winkel erscheint. In welcher Beziehung steht dieser Winkel zu dem, den die beiden Brennstrahlen BF und CF einschließen?

63. An eine Parabel sind in den Punkten B, C und L Tangenten gelegt. Wie läßt sich nachweisen, daß der dem Tangentendreieck umschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Parabel geht?

64. Um eine Parabel ist ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben. Welche Lage haben die Spitze desselben, der Berührungspunkt der Grundlinie und der Brennpunkt der Parabel zu einander?

65. Zwei Tangenten der Parabel $y^2 = px$ bilden mit der Scheiteltangente derselben ein gleichseitiges Dreieck, in dem jede Seite gleich s ist. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

66. Um eine Parabel ist ein gleichseitiges Dreieck beschrieben. Welche Lage haben die Geraden zu einander, welche die Ecken des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspunkten verbinden?

67. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. Unter welchen Winkeln wird dieselbe a) von dem Kreise $x^2 + y^2 = \frac{p^2}{16}$, b) von dem Kreise $\left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = p^2$ geschnitten?

68. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche den Kreis $y^2 + (x - a)^2 = r^2$ einschließend berührt. Die Achse derselben möge mit der X-Achse zusammenfallen und der Scheitel im Koordinatenanfangspunkte liegen.

Beispiel. $y^2 + (x - 13)^2 = 25$.

69. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven?

Beispiel. $y^2 = 3x$, $x^2 + y^2 = 25$.

70. Zwei Parabeln mit gemeinschaftlicher Achse entsprechen den Gleichungen $y^2 = p_1 x$ und $y^2 = p_2 (x - a)$. Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven?

Beispiele. a) $y^2 = 7x$, $y^2 = 11 (x - 9)$;
b) $y^2 = 15x$, $y^2 = 9 (x - 7)$.

71. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind an die Parabel $y^2 = px$ zwei Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben? Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

Beispiele. a) $y^2 = 5x$, $x_1 = 3$, $y_1 = 7$;
b) $y^2 = 11x$, $x_1 = 5$, $y_1 = 3$.

72. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind zwei Tangenten an die Parabel $y^2 = px$ gelegt. a) Wie groß ist das Rechteck aus den Abscissen der Berührungspunkte? b) Wie groß ist die Summe der Ordinaten der Berührungspunkte?

73. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Punkt (x_1, y_1). Welchen Winkel schließen die beiden Tangenten ein, die sich von dem gegebenen Punkte an die Parabel ziehen lassen? Wie läßt sich aus der gefundenen Relation die Gleichung für den in Aufgabe 54 gesuchten geometrischen Ort entwickeln?

Beispiel. $y^2 = 5x$, $x_1 = -3$, $y_1 = 7$.

Pol und Polare.

74. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind zwei Tangenten an die Parabel $y^2 = px$ gezogen. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Parabel?

Beispiele. a) $y^2 = 6x, \quad x_1 = -2, \quad y_1 = 5;$
b) $y^2 = 18x, \quad x_1 = 2, \quad y_1 = -6;$
c) $y^2 = \frac{10}{3}x, \quad x_1 = 11, \quad y_1 = 4.$

75. Welches ist die Gleichung der Polare des Brennpunktes bezüglich der Parabel $y^2 = px$?

76. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 11x$. In welchen Punkten wird dieselbe von der Polare des Punktes $x_1 = -5$, $y_1 = -1$ geschnitten?

77. Gegeben ist eine Parabel $y^2 = px$ und der Pol $P(x_1, y_1)$. Durch den Pol ist eine Parallele zur Achse bis zum Schnitt mit der Polare gezogen. In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch die Parabel geteilt?

78. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Es soll die Polare des Punktes bezüglich der Parabel durch Konstruktion gefunden werden.

79. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ werde als Polare bezüglich der Parabel $y^2 = px$ betrachtet. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles? Wo liegt der Pol, wenn $L = 0$ ist?

Beispiele. a) $y^2 = 14x, \quad 4y - 3x + 28 = 0;$

b) $y^2 = \frac{7}{4}x, \quad \frac{y}{13} - \frac{x}{2} = 1.$

80. Der Pol P liegt auf der Direktrix der Parabel. Von demselben ist ein Lot auf die zugehörige Polare gefällt. In welchem Punkte schneidet das Lot die Polare? Welche metrische Beziehung besteht in diesem Falle zwischen dem Lote und den Abschnitten der Polare?

81a. Die Gerade g gehe durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = px$. Der zugehörige Pol ist durch Konstruktion zu finden.

81b. Auf einer Parabel ist der Punkt A gegeben. Wie läßt sich nach dem vorhergehenden in diesem Punkte eine Tangente an die Parabel legen?

82. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Pol $P(x_1, y_1)$. a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Strahlen, welche von dem Brennpunkte F nach dem Pole und nach dem Schnittpunkte der Polare und der Direktrix gezogen werden können? b) Die von P ausgehende Parallele zur Achse schneide die Direktrix in L. Unter welchem Winkel wird die Polare des Punktes P von der Geraden LF geschnitten?

83. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2). In welcher Beziehung steht der Abschnitt, den die Polaren dieser Punkte auf der X-Achse bilden, zu dem Abstande der Fußpunkte der Lote, die sich von den Polen auf die X-Achse fällen lassen?

84. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 7x$ und die beiden Geraden $y = 5x - 1$ und $y = 3x + 2$. Die letzteren mögen als Polaren bezüglich der Parabel betrachtet werden. Welches ist die Gleichung der Verbindungslinie der beiden zugehörigen Pole? Wie groß ist der Inhalt des von den Geraden eingeschlossenen Dreiecks?

85. Der Gleichung $y^2 - px - k^2 = 0$ entspricht ein Parabelbüschel, wenn man dem Parameter p alle möglichen reellen Werte erteilt. Welche Lage haben die Polaren eines Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Parabeln dieses Büschels?

Durchmesser der Parabel.

86. Welche Gestalt nimmt die Gleichung der Polare des Punktes P (x_1, y_1) bezüglich der Parabel $y^2 = px$ an, wenn der Punkt P in die Unendlichkeit rückt?

87. In welchem Verhältnis wird jede nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Sehne der Parabel durch die zugehörige Polare (Durchmesser) geteilt?

88. Gegeben ist eine Schar paralleler Sehnen, welche der Gleichung $y = Mx + n$ entspricht (n ist eine veränderliche Konstante). Es ist die Gleichung des Durchmessers zu bestimmen, welcher der Sehnenschar konjugiert ist.

Beispiel. $y^2 = \frac{25}{7}x$, $4x - 7y + n = 0$.

89. Gegeben ist der Durchmesser einer Parabel $y = k$. Welcher Gleichung entspricht die demselben konjugierte Sehnenschar?

Beispiel. $y^2 = 13x$, $y = -11$.

90. In der Fläche der Parabel $y^2 = 6x$ befindet sich der Punkt $x_1 = 4$, $y_1 = 3$. Welche Sehne der Parabel wird in diesem Punkte halbiert?

91. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Durchmesser $y = q$. Es soll durch den Scheitelpunkt eine Sehne gezogen werden, welche durch den gegebenen Durchmesser halbiert wird. Wie läßt sich die Sehne durch Konstruktion ermitteln?

Beispiel. $y^2 = 16x$, $y = -9$.

92. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 9x$, die eines Durchmessers derselben $y = -7$. Welche Lage haben die Polaren aller Punkte des Durchmessers bezüglich der Parabel?

93. Die Parabel $y^2 = px$ wird durch eine Schar paralleler Sehnen, welche der Gleichung $y = Mx + q$ entspricht, geschnitten. Welches ist der Ort der Pole, wenn die Sehnen als Polaren betrachtet werden?

94. Von dem Punkte P (x_1, y_1) ist ein Durchmesser durch die Parabel $y^2 = px$ gezogen und in dem Schnittpunkte des Durchmessers und der Parabel eine Tangente an die letztere gelegt. Unter welchem Winkel ist die Tangente gegen die Polare des Punktes P geneigt?

95. Von dem Punkte P sind an eine Parabel zwei Tangenten und der Durchmesser gezogen, ferner in dem Punkte, in dem der Durchmesser die Parabel schneidet, eine Tangente an die letztere gelegt und bis zum Durchschnitt mit den beiden ersten Tangenten verlängert. Es ist zu zeigen, daß die dritte Tangente in ihrem Berührungspunkte halbiert wird und jede der durch P gehenden Tangenten halbiert.

96. An die Parabel $y^2 = px$ sind drei Tangenten gelegt und die Berührungspunkte durch gerade Linien verbunden. Wie verhält sich der Inhalt des umschriebenen Dreiecks zu dem des eingeschriebenen?

97. Durch den Punkt (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = px$ ist ein Durchmesser und eine Tangente gelegt. Welche Gestalt nimmt die Gleichung der Parabel an, wenn man den Durchmesser als Abscissenachse, die Tangente als Ordinatenachse betrachtet?

98. In welcher Beziehung steht der Parameter irgend eines Durchmessers zu der Entfernung des Endpunktes desselben vom Brennpunkte der Parabel?

99. In einer Parabel sind zwei parallele Sehnen gezogen. In welcher Beziehung stehen die Quadrate dieser Sehnen?

100. Gegeben ist eine Parabel. Das Achsensystem wird von einem Durchmesser und der Tangente im Endpunkte desselben gebildet, welche mit diesem den Winkel φ einschließt. Welches sind die Koordinaten des Poles, wenn die Gerade $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ als Polare bezüglich der Parabel betrachtet wird?

101. Auf zwei Durchmessern einer Parabel sind von ihren Endpunkten aus gleiche Stücke abgeschnitten und die Teilpunkte mit einander verbunden. In welcher Beziehung stehen die Abschnitte der so entstandenen Sehne zu einander?

Die Parabel als geometrischer Ort.

102. Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte sämtlicher Ordinaten einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = px$ ist?

103. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. a) Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte aller Leitstrahlen derselben? b) Jeder Leitstrahl ist um sich selbst verlängert. Auf welcher Linie liegen die Endpunkte?

104. Von dem Fußpunkte der Direktrix sind Sekanten in die Parabel $y^2 = px$ gezogen und die so entstandenen Sehnen halbiert. Auf welcher Kurve liegen die Halbierungspunkte der Sehnen?

105. Auf der Achse einer Parabel ($y^2 = px$) sind zwei Punkte mit den Abscissen $+ c$ und $- c$ gegeben. Von einer lotrecht zur Achse stehenden Parabelsehne sei der eine Endpunkt mit dem Punkte $(+ c, 0)$, der andere mit dem Punkte $(- c, 0)$ verbunden. Beide Verbindungslinien mögen sich im Punkte P schneiden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

106. Von dem Brennpunkte der Parabel $y^2 = px$ sind Lote auf die Normalen dieser Kurve gefällt. Es ist der geometrische Ort der Fußpunkte der Lote zu bestimmen.

107. Es ist der geometrische Ort des Schnittpunktes derjenigen Normalen der Parabel $y^2 = px$ zu bestimmen, welche lotrecht zu einander stehen.

108. An die Parabel $y^2 = px$ sind zwei Tangenten gelegt. Die Kotangenten der Neigungswinkel dieser Tangenten zur Hauptachse haben eine Differenz $= d$. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der Tangenten?

109. Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P außerhalb derselben. Von dem Punkte P ist ein Strahl nach g gezogen und über diesem als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck konstruiert, so daß der eine Schenkel desselben auf der Geraden g lotrecht steht. Welches ist der geometrische Ort der Spitze desselben?

110. Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P außerhalb derselben. Durch den Punkt P ist eine Schar von Kreisen gelegt, die alle von der Geraden g berührt werden. Auf welcher Linie liegen die Endpunkte aller Durchmesser, die von P aus gezogen werden können?

111. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte der Kreise, welche nach der vorhergehenden Aufgabe zu zeichnen sind?

112. Die konstante Grundlinie a eines Dreiecks liegt fest; zwischen den beiden anliegenden Winkeln β und γ besteht die Relation $\sin\beta = \operatorname{tg}\gamma$. Welches ist der geometrische Ort der Spitze des Dreiecks?

113. Von einem Dreieck liegt ein Eckpunkt fest, die demselben gegenüberliegende Seite aber, welche die konstante Länge c hat, wird längs einer gegebenen Geraden g fortgeschoben. Auf welcher Linie bewegt sich dann der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises fort?

114. Von einem Dreieck ist die Grundlinie c und der Inhalt J gegeben. Die Seite c möge mit der X-Achse, der eine Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfallen. Welches ist der geometrische Ort des Höhenpunktes?

115. Die Grundlinie c eines Dreiecks hat dieselbe Lage wie in der vorhergehenden Aufgabe. Die gegenüberliegende Spitze gleitet auf der Parabel $y^2 = px$ fort. Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunktes?

116. Die Grundlinie c eines Dreiecks hat dieselbe Lage wie in Aufgabe 114. Die gegenüberliegende Spitze gleitet längs der Parabel $y + nx^2 - mx = 0$, deren Direktrix der X-Achse parallel läuft, fort. Welche Linie beschreibt der Schwerpunkt des Dreiecks?

117. Gegeben ist die Gerade g und der Punkt P. Es soll der geometrische Ort eines Punktes Q bestimmt werden, so daß das Quadrat seiner Entfernung von P, vermindert um das Quadrat seines Abstandes von g, gleich d^2 ist.

118. In dem Teile des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$, der zwischen den beiden Geraden $x = 0$ und $x = r$ liegt, sind Kreise konstruiert, welche die Peripherie und den Durchmesser berühren. Welches ist die Gleichung der Linie, auf welcher die Mittelpunkte dieser Kreise liegen?

119. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller derjenigen Kreise, welche die Gerade $x = 0$ und den Kreis $y^2 + (x - a)^2 = r^2$ berühren?

120. Gegeben ist die Gerade g $(x = 0)$ und der Kreis K $[(x - a)^2 + y^2 = r^2]$. Es soll der geometrische Ort desjenigen Punktes bestimmt werden, dessen Entfernung von g gleich der Tangente ist, die sich von ihm an den Kreis K ziehen läßt.

121. In dem Rechteck $ABCD$ ist eine Parallele zu der Diagonale AC gezogen, welche die Seite AB in E, die Seite BC in F schneidet. Man verbindet A mit F und zieht durch E eine Parallele zu BC, dann schneiden sich diese Linien im Punkte P. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn die Gerade EF so verschoben wird, daß sie der Diagonale AC parallel bleibt?

122. Gegeben sind die beiden Kreise $x^2 + y^2 = 4r^2$ und $y^2 = x(2r - x)$. Die Tangenten des letzteren mögen als Polaren bezüglich des ersteren betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

123. Die Tangenten der Parabel $y^2 = px$ mögen als Polaren bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

Konstruktionsaufgaben.

124. Zur Konstruktion einer Parabel ist außer dem Brennpunkte F und der Richtung der Achse a

a) ein Punkt P der Kurve oder
b) die Richtung einer Tangente t

gegeben.

125. Es soll die Lage der Direktrix und der Achse einer Parabel bestimmt werden, wenn der Brennpunkt F, die Richtung einer Tangente t und deren Berührungspunkt P gegeben sind.

126. Zur Konstruktion einer Parabel sind zwei Tangenten t_1 und t_2 und der Brennpunkt F gegeben.

127. Gegeben sind zwei Tangenten t_1 und t_2 und der Brennpunkt F einer Parabel. Es soll die Lage eines Punktes der Kurve gefunden werden, dessen Brennstrahl gleich dem arithmetischen Mittel der Brennstrahlen der beiden Punkte ist, in denen die Parabel von t_1 und t_2 berührt wird.

128. Von einer Parabel sind der Brennpunkt und der Scheitelpunkt gegeben. Es sollen die beiden Tangenten gezogen werden, deren Berührungssehne durch den Punkt P geht und mit der Achse einen gegebenen Winkel α einschließt.

129. Eine Parabel ist zu konstruieren, wenn außer dem Brennpunkte F

a) zwei Punkte der Kurve P_1 und P_2 oder

b) ein Punkt P und die Richtung einer Tangente t

gegeben sind.

130. Gegeben sind ein Punkt der Direktrix D, der Brennpunkt F und ein Punkt P der Parabel. Die Kurve ist zu konstruieren.

131. Zur Konstruktion einer Parabel sind zwei Punkte derselben, P_1 und P_2, und die Direktrix d gegeben.

132. Von einer Parabel kennt man die Lage eines Punktes P, die Richtung der Achse a und die der Direktrix d. Die Parabel ist zu konstruieren.

133. Zur Konstruktion einer Parabel ist die Direktrix d, eine Tangente t und der Berührungspunkt derselben P gegeben. Wie läßt sich die Lage des Brennpunktes bestimmen?

134. Es soll der Brennpunkt einer Parabel gefunden werden, wenn ein Punkt P der Kurve, die Direktrix d und eine Tangente t der Lage nach bekannt sind.

135. Die Direktrix d, die Scheiteltangente s und eine andere Tangente t einer Parabel sind gegeben. Wie findet man den Brennpunkt der Kurve?

136. Gegeben sind die Direktrix d und die beiden Tangenten t_1 und t_2 einer Parabel. Der Brennpunkt und die Berührungspunkte der beiden Tangenten sind zu finden.

137. Von einer Parabel kennt man die Lage eines Punktes P, die Richtung der Achse a und die Lage des Scheitelpunktes S. Brennpunkt und Direktrix sind durch Konstruktion zu finden.

138. Zur Konstruktion einer Parabel sind die Achse a, eine Tangente t und deren Berührungspunkt P gegeben.

139. Wie findet man Brennpunkt und Direktrix einer Parabel, wenn die Achse a, der Scheitel S und eine Tangente t gegeben sind?

140. Von einer Parabel sind die Scheiteltangente t_1, eine andere Tangente t_2 und der Berührungspunkt P der letzteren gegeben. Wie läßt sich die Konstruktion der Parabel ausführen?

141. Zwei Tangenten der Parabel t_1 und t_2 mit ihren Berührungspunkten P_1 und P_2 sind gegeben. Die Lage der Direktrix und des Brennpunktes durch Konstruktion zu bestimmen.

142. Aus der Scheiteltangente t_1 und zwei andern Tangenten t_2 und t_3 einer Parabel die Bestimmungsstücke dieser Kurve durch Konstruktion zu ermitteln.

143. Zur Konstruktion einer Parabel sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und die Achse a gegeben.

144. Gegeben sind die drei Tangenten t_1, t_2 und t_3 einer Parabel und der Winkel α, welchen die Tangente t_1 mit der Direktrix einschließt. Direktrix und Brennpunkt sind zu finden.

145. Gegeben sind die drei Tangenten t_1, t_2, t_3 einer Parabel und der Punkt P_1 auf t_1, in dem diese von der Scheiteltangente geschnitten wird. Welche Lage hat die Direktrix?

146. Von einer Parabel sind die beiden Punkte P_1 und P_2 und die Achse a gegeben. Wie läßt sich die Konstruktion der Kurve ausführen?

147. Von einer Parabel sind vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 gegeben. Die Kurve ist durch Konstruktion zu finden.

148. Zur Konstruktion einer Parabel sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und der Berührungspunkt P_1 der ersten gegeben.

149. In ein gleichschenkliges Dreieck soll eine Parabel gelegt werden, so daß die Achse mit der Höhe zur Grundlinie zusammen fällt und die Schenkel die Parabel in den Endpunkten der Grund linie berühren.

150. Direktrix und Brennpunkt einer Parabel zu finden, welche die eine Seite eines Dreiecks in ihrem Halbierungspunkte, die beiden andern Seiten in ihren Verlängerungen berührt.

151. Von einer gegebenen Parabel sollen Brennpunkt, Direktrix und Achse durch Konstruktion gefunden werden.

152. Von einer Parabel ist ein Bogen gegeben, welcher den Scheitel nicht enthält. Wie findet man Achse und Scheitel der Kurve?

153. Zur Konstruktion einer Parabel ist die Richtung und Lage der Achse a, die Länge des Parameters p und ein Punkt der Kurve P gegeben.

154. Es soll durch Konstruktion der Brennpunkt einer Parabel gefunden werden, wenn die Direktrix d, ein Pol P und die zugehörige Polare p der Lage nach gegeben sind.

155. Zur Konstruktion einer Parabel sind der Brennpunkt derselben F, der Pol P und die zugehörige Polare p gegeben.

156. Von einer Parabel ist die Achse a gegeben, ferner der Pol P und die zugehörige Polare p. Wie läßt sich die Konstruktion der Parabel ausführen?

157. Zur Konstruktion einer Parabel ist die Scheiteltangente s, ein Pol P und die zugehörige Polare p gegeben.

Flächeninhalt der Parabel.

158. Von der Parabel $y^2 = px$ sind die Abscissen zweier Punkte x_1 und x_2 gegeben. Wie groß ist der Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches von den beiden zugehörigen (positiven oder negativen) Ordinaten, der Achse und dem Parabelbogen begrenzt wird?

Beispiel. $y^2 = 6x$, $x_1 = 8\frac{1}{6}$, $x_2 = 13\frac{1}{2}$.

159. Welches ist der Inhalt des durch den Parameter abgeschnittenen Parabelsegmentes, wenn die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ist?

Beispiel. $y^2 = 9x$.

160. Wie groß ist der Parameter einer Parabel, von welcher eine zur Achse senkrechte Gerade von der Länge $2a$ ein Segment $= a^2$ abschneidet?

161. Zwei Punkte der Parabel $y^2 = px$, deren Abscissen x_1 und x_2 und deren Ordinaten positiv sind, werden durch eine Sehne verbunden. Wie groß ist das von der Sehne und dem Bogen begrenzte Stück?

Beispiel. $y^2 = 4x$, $x_1 = 9$, $x_2 = 25$.

162. Durch den Scheitelpunkt der Parabel $y^2 = px$ ist eine Sehne gezogen, welche gegen die Achse unter dem Winkel α geneigt ist. Welchen Inhalt hat das durch dieselbe abgeschnittene Segment?

Beispiel. $y^2 = 10x$, $\angle \alpha = 50^0$.

163. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s ist eine Parabel beschrieben, so daß der Scheitel derselben mit dem einen

Eckpunkte, die Achse mit der Höhe zusammenfällt. Wie groß ist die Summe der Inhalte der beiden Segmente?

164. Durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = px$ ist eine Sehne gelegt, welche mit der X-Achse den Winkel α einschließt. Welchen Inhalt hat das Parabelsegment, das durch diese Sehne abgeschnitten wird?

Beispiel. $y^2 = 7x$, $\angle\alpha = 45^0$.

165. Die im Brennpunkte der Parabel $y^2 = px$ stehende positive Ordinate ist um den Parameter verlängert und durch den Endpunkt der Verlängerung ist eine Parallele zur Achse gezogen. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der beiden entstandenen dreieckigen Figuren?

166. In der Parabel $y^2 = px$ ist eine Sehne gezogen, deren Endpunkte die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 besitzen. In welchem Verhältnis steht das Segment zu dem Parallelogramm, welches die Sehne und die derselben parallele Tangente der Parabel zu Seiten hat?

167. Von dem Punkte (x_1, y_1) sind an die Parabel $y^2 = px$ zwei Tangenten gezogen. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, welches von den beiden Tangenten und dem dazwischen liegenden Parabelbogen begrenzt wird?

168. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 3x$. In derselben ist eine Sehne gezogen, welche die Länge 10 besitzt und unter einem Winkel von 50^0 gegen die Achse geneigt ist. Welches ist der Inhalt des von derselben abgeschnittenen Parabelsegmentes?

169. Die Parabel $y^2 = 9x$ wird von den beiden Parallelen $y - x + 10 = 0$ und $y - x + 18 = 0$ geschnitten. Welchen Inhalt hat das von den beiden Geraden und den dazwischen liegenden Bogen der Parabel begrenzte Stück?

170. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$ und der Kreis $y^2 = 4px - x^2$. Welche Inhalte haben die Teile, in welche der Kreis durch die Parabel zerlegt wird?

171. Gegeben ist die Parabel $y^2 = px$. Über dem Parameter derselben als Durchmesser ist ein Kreis konstruiert. In welchem Verhältnis stehen die Teile des Kreises, in welche derselbe durch die Parabel zerlegt wird?

172. Zwei Parabeln sind gegeben, welche den Gleichungen $y^2 = px$ und $x^2 = py$ entsprechen. Es soll der Inhalt desjenigen

Flächenstückes bestimmt werden, welches von den Bogen begrenzt wird, die zwischen den Schnittpunkten liegen.

173. Die beiden Parabeln $y^2 = px$ und $y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{4}\right)$ schneiden sich in zwei Punkten. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, welches von den Bogen begrenzt wird, die zwischen den Schnittpunkten liegen?

174. Gegeben sind zwei konfokale Parabeln, deren Scheitel auf verschiedenen Seiten des gemeinschaftlichen Brennpunktes liegen. Wie groß ist das von beiden eingeschlossene Flächenstück?

175. Die Polargleichung einer Parabel ist $r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 - \cos\varphi}$. Gegeben sind zwei Radienvektoren r_1 und r_2, sowie die zugehörigen Anomalien φ_1 und φ_2. Welches ist der Inhalt des von r_1 und r_2 herausgeschnittenen Parabelsektors?

Beispiel. $p = 10$, $\angle\varphi_1 = 60^0$, $\angle\varphi_2 = 30^0$.

176. Ein Komet beschreibt bei seiner Bewegung um die Sonne eine Parabel. Nach Verlauf von 30 Tagen hat derselbe eine Winkelentfernung von $6^0\, 30'$ vom Perihel erreicht und befindet sich in der Entfernung von 1,5 Erdweiten von der Sonne. Wie lange Zeit wird verstreichen, bis die Entfernung des Kometen von der Sonne 3 Erdweiten beträgt, und welches ist dann die Winkelentfernung desselben vom Perihel?

Die Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse.

177. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, für den die Summe der Entfernungen von den beiden Punkten $(e, 0)$ und $(-e, 0)$ gleich $2a$ ist?

178. Die Achsen einer Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn die Hauptachse $2a = 10$, die Nebenachse $2b = 6$ ist?

179. Die Hauptachse einer Ellipse ist $2a = 26$, die lineare Excentricität $e = 12$. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn die Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen?

180. Die Summe der Halbachsen einer Ellipse ist $a + b = 27$, die lineare Excentricität $e = 9$. Welches ist die Gleichung der Ellipse?

181. Die Achsen einer Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen, die Koordinaten zweier Punkte der Kurve sind x_1, y_1; x_2, y_2. Welches ist die Gleichung der Ellipse?

Beispiel. $x_1 = 1$, $y_1 = 4$; $x_2 = -6$, $y_2 = 1$.

182. Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Ellipse sind $x_0 = 4$, $y_0 = 7$, die Achsen derselben $2a = 14$, $2b = 8$. Welches ist die Gleichung derselben, wenn die Achsen den Koordinatenachsen parallel laufen?

183. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse

$$16y^2 - 32y + 9x^2 + 36x = 92.$$

Welches sind die Koordinaten des Mittelpunktes? Wie groß sind die Achsen? Welches sind die Koordinaten der Brennpunkte?

184. Wie verhalten sich die Quadrate der Ordinaten zweier Punkte der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$?

185. Die Gleichung einer Ellipse ist $7y^2 + 3x^2 = 18$. Wie groß ist der Parameter? Wie groß die numerische Excentricität $\varepsilon = \frac{e}{a}$ derselben?

186. In welcher Beziehung stehen zwei Ellipsen, die in der numerischen Excentricität übereinstimmen?

187. Gegeben sind zwei Ellipsen, die in der numerischen Excentricität übereinstimmen und gleiche Parameter besitzen. In welcher Beziehung stehen beide Ellipsen zu einander?

188. Für welchen Punkt der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Abscisse und Ordinate gleich? Wie läßt sich der Punkt durch Konstruktion finden?

189. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der Punkt (x_1, y_1) derselben. Welches sind die Gleichungen der Brennstrahlen, die sich nach diesem Punkte ziehen lassen? Wie lang ist jeder der Brennstrahlen?

Beispiel. $100y^2 + 36x^2 = 3600$, $x_1 = 8$, $y_1 = 3{,}6$.

190. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse $18y^2 + 7x^2 = 126$. Welchen Winkel schließen die nach dem Punkte $x_1 = 3$, $y_1 > 0$ derselben gezogenen Brennstrahlen miteinander ein?

191. Für welchen Punkt der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist das Rechteck aus den Brennstrahlen gleich dem Quadrate über $\frac{3}{2}b$?

192. Welches ist die Gleichung einer Ellipse, in der die Summe der Brennstrahlen eines Punktes derselben dreimal so groß ist als die doppelte lineare Excentricität?

193. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Welche Gestalt nimmt dieselbe an, wenn die Gerade $x = -a$ zur Y-Achse gewählt wird, die X-Achse aber unverändert bleibt (Scheitelgleichung)?

194. Wenn ein Punkt der Ellipse $36y^2 + 25x^2 = 900$ die Ordinate $+3$ hat, welches ist dann die Abscisse für die Scheitelgleichung derselben?

195. Die Scheitelgleichung einer Ellipse ist $y^2 = 5\frac{5}{9}x - \frac{25}{81}x^2$. Wie groß sind die Achsen derselben?

196. Von einer Ellipse ist die kleinere Achse $2b = 12$ und der Parameter $p = 5$ gegeben. Welches ist die Scheitelgleichung derselben?

197. Für die Scheitelgleichung einer Ellipse sind die Koordinaten zweier Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben. Wie groß sind die Achsen derselben?

Beispiel. $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = 6$, $y_2 = -1$.

198. Welches ist die Polargleichung einer Ellipse, deren Achsen $2a$ und $2b$ sind, wenn der Mittelpunkt als Pol, die Hauptachse als Achse angenommen wird? Wie groß ist die Summe der reciproken Quadrate zweier Radienvektoren, die aufeinander lotrecht stehen?

199. Welches ist die Polargleichung einer Ellipse mit den Achsen $2a$ und $2b$, wenn die Hauptachse als Achse und einer der Brennpunkte als Pol angenommen wird?

200. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse ist eine Sehne gezogen. Wie groß ist das Rechteck, welches sich aus den Abschnitten derselben bilden läßt?

201. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse sind zwei Sehnen gezogen. Wie verhalten sich die Rechtecke, von denen jedes aus den Abschnitten einer Sehne gebildet wird?

202. Wie groß ist das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten einer Brennpunktsehne der Ellipse?

203. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse sind zwei Sehnen gezogen, welche lotrecht zu einander stehen. Wie groß ist die Summe der reciproken Werte derselben?

204. Die große Achse einer Ellipse ist $2a = 20$, die lineare Excentricität $e = 6$. Für welche Anomalie ist der Radiusvektor gleich dem Parameter der Ellipse?

205. Gegeben ist die doppelte Excentricität der Erdbahn $2e = 69600$ Meilen und die große Achse derselben $2a = 41280000$ Meilen. Um wieviel ist die Entfernung der Erde von der Sonne gewachsen, wenn sich dieselbe um den Winkel $\alpha = 120^0$ vom Perihel fortbewegt hat?

206. Es soll die numerische Excentricität der Erdbahn gefunden werden, wenn die Entfernung der Erde von der Sonne bei der Anomalie $\varphi = 110^0$ 20659200 Meilen beträgt, und der halbe Parameter gleich 20639000 Meilen ist.

Die Ellipse und die Gerade.

207. In welchen Punkten wird die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ von der Geraden $y = Mx + n$ geschnitten?

Beispiele. a) $25y^2 + 4x^2 = 100, \quad y = 5x + 7;$
b) $36y^2 + 25x^2 = 900, \quad 9y - 10x + 75 = 0;$
c) $7x^2 + 9y^2 = 1, \quad y = 2x + 11.$

208. Welches ist die geometrische Bedeutung der Relation

$$a^2M^2 + b^2 - n^2 \gtreqless 0?$$

209. Die Achsen einer Ellipse fallen mit den Koordinatenachsen zusammen. Welches ist die Gleichung der Ellipse in Linienkoordinaten?

210. Um den Punkt $(e, 0)$ ist mit dem Radius $2a$ ein Kreis beschrieben und in demselben ein Büschel von Sehnen gezogen, dessen Mittelpunkt $(-e, 0)$ ist. Errichtet man in den Halbierungspunkten der Abschnitte jeder Sehne Lote, so werden diese von einer Kurve eingehüllt. Welches ist die Gleichung dieser Kurve in Linienkoordinaten? $(a > e.)$

211. Um den Punkt $(e, 0)$ bewegt sich der Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitel auf der Peripherie des Kreises

$x^2 + y^2 = r^2$ fortgleitet. Welche Kurve umhüllt die verschiedenen Lagen des zweiten Schenkels? $(r > e.)$

212. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Innerhalb desselben sind durch die Punkte $(e, 0)$ und $(-e, 0)$ parallele Sehnen gezogen und die Endpunkte derselben, welche auf derselben Seite des Kreisdurchmessers liegen, durch gerade Linien verbunden. Welche Kurve hüllt die letzteren geraden Linien ein?

213. Gegeben ist das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx - f^2 = 0$. Auf der Y-Achse sind die beiden Lote $y = a$ und $y = -a$ errichtet $(a > f)$ und die Punkte, in denen ein Kreis des Büschels von diesen Loten geschnitten wird, kreuzweise verbunden. Welche Kurve umhüllt die letzteren Linien? Was wird aus dem Gebilde für $a = f$?

214. Gegeben sind der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die beiden Tangenten $x = r$ und $x = -r$. Von den beiden Berührungspunkten der Tangenten seien Gerade nach dem Punkte C der Peripherie gezogen und die Schnittpunkte der Verlängerungen dieser Linien mit den Tangenten durch eine Gerade XY verbunden. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen dieser Geraden XY ein, wenn der Punkt C auf der Peripherie des Kreises fortrückt?

215. In welchen Punkten schneidet die Ellipse

$$49y^2 - 196y + 25x^2 + 150x - 1000 = 0$$

die Koordinatenachsen?

216. Gegeben ist die Ellipse

$$9y^2 - 18y + 4x^2 - 16x - 11 = 0$$

und die Gerade $x - 2y - 2 = 0$. In welchen Punkten wird die Ellipse von der Geraden geschnitten?

217. Durch einen Brennpunkt der Ellipse $169y^2 + 25x^2 = 4225$ ist eine Sehne gelegt, welche zu beiden Achsen gleiche Neigung hat. In welchen Punkten schneidet dieselbe die Ellipse?

218. Durch den links liegenden Brennpunkt der Ellipse $100y^2 + 9x^2 = 900$ ist eine Sehne von der Länge 7 zu ziehen. Welches ist die Gleichung derselben?

219. Von dem Koordinatenanfangspunkte sind an die Ellipse

$$25y^2 - 200y + 4x^2 - 56x + 496 = 0$$

zwei Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben?

220. Jede der beiden Achsen der Ellipse $49y^2 + 25x^2 = 1225$ sei stetig geteilt, so daß die Teilpunkte auf den positiven Achsenteilen liegen. Welches sind die Koordinaten der Punkte, in denen die Verbindungslinie dieser Teilpunkte die Ellipse schneidet?

221. In die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist ein Quadrat einbeschrieben. Welches sind die Gleichungen der Seiten? Wie groß ist der Inhalt desselben?

222. In die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind zwei gleichseitige Dreiecke beschrieben: a) die eine Spitze des einen Dreiecks befindet sich in dem links liegenden Scheitel auf der Hauptachse, b) die eine Spitze des andern dagegen im rechts liegenden Brennpunkte. Welches sind die Koordinaten der übrigen Ecken?

223. In die Ellipse $25y^2 + 9x^2 = 225$ ist ein gleichseitiges Sechseck eingezeichnet, so daß zwei Ecken desselben in den Endpunkten der kleineren Achse liegen. Welches sind die Koordinaten der übrigen Ecken?

224. Es soll der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ein Rechteck einbeschrieben werden, dessen Inhalt gleich dem des Quadrates ist, welches dem Kreise $x^2 + y^2 = ab$ einbeschrieben werden kann.

225. Welches sind die Gleichungen der Seiten eines der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ eingeschriebenen Rechtecks, dessen Inhalt ebenso groß ist als der des eingeschriebenen Quadrates?

Tangente und Normale der Ellipse.

226. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiele. a) $20y^2 + 5x^2 = 100$, $x_1 = 2$, $y_1 = 2$;
b) $9y^2 + 4x^2 = 36$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $y_1 \lessgtr 0$.

227. Durch den rechts liegenden Brennpunkt der Ellipse $25y^2 + 16x^2 = 1600$ ist ein Brennstrahl unter einem Winkel von 30^0 zur Achse gezogen. Welches ist die Gleichung der Tangente im Schnittpunkte?

228. Im Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sei die Normale konstruiert. Welches ist die Gleichung derselben? Welche Stücke schneidet dieselbe auf den Koordinatenachsen ab?

Beispiel. $15y^2 + 8x^2 = 120$, $x_1 = 3$, $y_1 < 0$.

229. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Im Punkte (x_1, y_1) derselben sind Tangente und Normale konstruiert. Wie lang ist die Tangente? Wie lang die Normale? Wie lang die Subtangente? Wie lang die Subnormale?

Beispiel. $25y^2 + 4x^2 = 100$; $x_1 = 4$, $y_1 = \frac{6}{5}$.

230. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist eine Tangente gelegt. Welche Beziehung besteht zwischen dem Winkel φ_1, den der Radiusvektor vom Mittelpunkte nach dem Berührungspunkte gezogen mit der X-Achse einschließt, und dem Winkel φ_2, unter dem die Tangente gegen die X-Achse geneigt ist?

231. Durch einen Punkt der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist die Tangente und die Normale gezogen. Wo liegt dieser Punkt, wenn die beiden Linien mit der Abscissenachse ein gleichschenkliges Dreieck einschließen, dessen Grundlinie in der X-Achse liegt?

232. Auf die Tangenten der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind von dem Brennpunkte $(e, 0)$ Lote gefällt. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf der die Fußpunkte der Lote liegen?

233. Von dem Brennpunkte $(e, 0)$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist ein Lot auf die Tangente, deren Berührungspunkt (x_1, y_1) ist, gefällt und über den Fußpunkt hinaus verlängert, ferner ist der Brennpunkt $(-e, 0)$ mit dem Punkte (x_1, y_1) durch eine Gerade verbunden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, in dem die letztere Verbindungslinie die Verlängerung des Lotes schneidet?

234. Durch den Mittelpunkt einer Ellipse ist ein Strahl gezogen, welcher dem von dem Brennpunkte $(e, 0)$ nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogenen Radiusvektor parallel läuft. Welches ist der geometrische Ort des Punktes, in dem der Strahl die Tangente schneidet?

235. Von einem Brennpunkte einer Ellipse ist ein Lot auf eine Tangente gefällt und über den Fußpunkt hinaus um sich selbst verlängert. Es ist zu zeigen, daß der Endpunkt der Verlängerung (Gegenpunkt des Brennpunktes), der Berührungspunkt und der andere Brennpunkt in einer Geraden liegen.

236. In welcher Beziehung stehen die Winkel, welche die nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahlen mit der Tangente einschließen?

237. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Welches ist der geometrische Ort des Gegenpunktes des Brennpunktes $(c, 0)$ bezüglich der Tangenten der Ellipse?

238. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und den Hauptkreis $y^2 + x^2 = a^2$ sind Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte dieselbe Abscisse haben. In welcher Beziehung stehen die Subtangenten? In welcher Beziehung die Subnormalen?

239. Auf einer gegebenen Ellipse ist der Punkt P gegeben. Es soll in diesem Punkte eine Tangente an die Ellipse gelegt werden. Wie ist die Konstruktion auszuführen?

240. Wie läßt sich von einem beliebigen Punkte P eine Tangente an eine Ellipse legen?

241. An die Ellipse $5y^2 + 3x^2 = 15$ ist eine Tangente zu legen, welche der Geraden $3y - 4x + 1 = 0$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben?

242. An die Ellipse $36y^2 + 25x^2 = 900$ sind Tangenten gelegt, welche die X-Achse unter einem Winkel von 30^0 schneiden. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

243. Von einem Punkte der verlängerten Hauptachse der Ellipse $9y^2 + x^2 = 9$ ist eine Tangente von der Länge $t = 5$ an die Ellipse gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

244. Bekannt sind die große Achse $2a = 18$ und die lineare Excentricität $e = 5$ einer Ellipse. Die Leitstrahlen eines Punktes derselben im ersten Quadranten schließen einen Winkel von 40^0 ein. Unter welchem Winkel ist die Tangente der Ellipse an diesem Punkte gegen die X-Achse geneigt?

245. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Tangenten gelegt, so daß die Subtangenten gleich den Abscissen der Berührungspunkte sind. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

246. Im Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist die Tangente und die Normale konstruiert und vom Mittelpunkte ein Lot auf die Tangente gefällt. Wie groß ist das Rechteck, welches das Lot und die Normale zu Seiten hat?

247. Von den Brennpunkten einer Ellipse sind Lote auf eine beliebige Tangente derselben gefällt. Wie groß ist das Rechteck aus diesen beiden Loten?

248. Es ist zu zeigen, daß Tangente und Normale einer Ellipse mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahlen ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

249. In welchem Verhältnis wird die Abscisse eines Punktes der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ durch die in demselben konstruierte Normale geteilt?

250. In welchem Verhältnis stehen die Abschnitte einer Normale der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, welche von dem Kurvenpunkte bis zu den Schnittpunkten mit den Achsen gerechnet werden?

251. In dem Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Tangente und Normale konstruiert. Wie groß ist das Rechteck aus den Achsenabschnitten, welche α) durch die Tangente, β) durch die Normale abgegrenzt werden?

252. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente gelegt und bis zum Schnitt mit den beiden Scheiteltangenten verlängert. Über dem Abschnitt derselben als Durchmesser ist ein Kreis konstruiert. Welches ist die Gleichung des Kreises? In welchen Punkten wird die X-Achse von demselben geschnitten?

253. Im Punkte $P(x_1, y_1)$ ist an die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ eine Tangente gelegt, welche die Verlängerung der kleineren Achse in Q schneidet. Es werde ein Kreis beschrieben, der durch P und Q geht und dessen Mittelpunkt in der kleineren Achse liegt. In welchen Punkten schneidet dieser Kreis die Hauptachse der Ellipse?

254. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Tangenten gelegt. Wie groß ist der Winkel, den beide miteinander einschließen? Welches ist die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt der Tangenten mit dem Mittelpunkte verbindet?

Beispiel. $9y^2 + 4x^2 = 36$; $x_1 = 1$, $y_1 > 0$; $x_2 = 2$, $y_2 < 0$.

255. Zwei Tangenten, welche die Ellipse in den Punkten P_1 und P_2 berühren, schneiden sich im Punkte S. Man verbinde den Brennpunkt F_1 mit den 3 Punkten P_1, P_2 und S. In welcher Beziehung stehen die beiden Winkel P_1F_1S und SF_1P_2 zu einander?

256. Zwischen zwei festen Tangenten einer Ellipse bewegt sich eine dritte. Wie verhalten sich die Winkel, unter welchen

die dritte Tangente in ihren verschiedenen Lagen vom Brennpunkte aus erscheint?

257. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind zwei Tangenten gelegt, welche sich rechtwinklig durchschneiden. In welcher Beziehung stehen die Rechtecke, von denen das eine aus den Abscissen, das andere aus den Ordinaten der Berührungspunkte gebildet ist?

258. An der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ gleiten zwei Tangenten fort, die rechtwinklig zu einander geneigt sind. Welches ist der geometrische Ort des Scheitels des rechten Winkels?

259. In ein gegebenes Rechteck mit den beiden Seiten $2a$ und $2b$ sind Ellipsen und in jede der Ellipsen ein Rhombus beschrieben. In welcher Beziehung stehen die Umfänge sämtlicher Rhomben, welche durch die Scheitel der Ellipsen bestimmt sind?

260. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der Kreis $y^2 + x^2 = ab$. α) Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven? β) Unter welchem Winkel schneiden sich Kreis und Ellipse?

261. Der Mittelpunkt eines gegebenen Kreises sei zugleich ein Brennpunkt einer Ellipse. Die gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven mögen durch Konstruktion bestimmt werden.

262. Es ist eine Parabel konstruiert, welche mit der Ellipse $4y^2 + x^2 = 4a^2$ den rechts liegenden Brennpunkt gemein hat und deren Scheitel im Koordinatenanfangspunkte liegt. α) Welches sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kurven? β) Unter welchem Winkel wird die Ellipse von der Parabel geschnitten?

263. An die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind von dem Punkte (x_1, y_1) zwei Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben? Welche Winkel schließen die Tangenten ein?

Beispiel. $4y^2 + x^2 = 25$; $x_1 = 8$, $y_1 = 3$.

264. Gegeben ist die Ellipse $16y^2 + 9x^2 = 144$. Von einem Punkte im positiven Quadranten, dessen Ordinatenquadrat dreimal so groß ist als das Quadrat der zugehörigen Abscisse, sind zwei Tangenten an die Ellipse zu legen, welche sich rechtwinklig durchschneiden. Welches sind die Gleichungen der Tangenten?

Pol und Polare.

265. Gegeben ist die Gleichung einer Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1) bezüglich der Ellipse?

Beispiele. a) $9y^2+ 4x^2=36$; $x_1=5$, $y_1=7$;
b) $64y^2+36x^2=2304$; $x_1=6$, $y_1=-\frac{3}{2}\sqrt{7}$;
c) $11y^2+ 3x^2=1$; $x_1=\frac{1}{5}$, $y_1=\frac{1}{8}$.

266. Die Brennpunkte der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ mögen als Pole betrachtet werden. Welches sind die Gleichungen der zugehörigen Polaren?

267. Auf der Direktrix $x=\frac{a^2}{e}$ liegt der Punkt P. Von demselben ist eine Gerade nach dem zugehörigen Brennpunkte $(e, 0)$ gezogen. Unter welchem Winkel schneidet diese Gerade die Polare des Punktes P?

268. Von dem Punkte (x_1, y_1) der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ ist ein Strahl nach dem Brennpunkte $(e, 0)$ gezogen und ein Lot auf die zugehörige Direktrix gefällt. Wie verhalten sich die beiden Strecken zu einander?

269. Es ist der geometrische Ort eines Punktes zu finden, dessen Entfernung von dem Punkte $(k, 0)$ sich zu der von der Y-Achse wie m zu n verhält. $(m<n.)$

270. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Von dem Fußpunkte der Direktrix $x=\frac{a^2}{e}$ ist eine Tangente an die Ellipse gelegt, und von einem Punkte dieser Geraden ein Lot auf die Hauptachse gefällt, endlich ist der Punkt, in dem dieses Lot die Ellipse schneidet, mit dem Brennpunkte $(e, 0)$ verbunden. Wie verhält sich diese Verbindungslinie zu dem Lote?

271. Von dem Punkte (x_1, y_1) soll eine Gerade gezogen werden, welche die Polare dieses Punktes bezüglich der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ halbiert.

272. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ und der Punkt (x_1, y_1). Die Polare des Punktes bezüglich der Ellipse soll durch Konstruktion gefunden werden.

273. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiele. a) $16y^2 + x^2 = 16$, $x + 6y - 3 = 0$;
b) $20y^2 + 75x^2 = 1500$, $21x + 25y - 525 = 0$.

274. Gegeben ist eine Ellipse und eine Brennpunktsehne derselben. Wie läßt sich der Pol durch Konstruktion finden, wenn die Brennpunktsehne als Polare betrachtet wird?

275. An eine Ellipse ist im Punkte P derselben eine Tangente zu legen. Bekannt ist die Lage eines Brennpunktes F derselben und der zugehörigen Direktrix d.

276. Der Punkt P (x_1, y_1) ist mit dem Brennpunkte $(e, 0)$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ verbunden und in diesem Brennpunkte auf der Verbindungslinie ein Lot errichtet. Es ist zu zeigen, daß das Lot, die Polare des Punktes P und die dem Brennpunkte $(e, 0)$ zugehörige Direktrix sich in einem Punkte schneiden.

277. Der Punkt P (x_1, y_1) ist mit dem Mittelpunkte der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ verbunden, und die Verbindungslinie schneidet die Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ im Punkte K. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade, welche von K nach F $(e, 0)$ geht, die Polare des Punktes P?

278. Die Tangenten des Hauptkreises der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ mögen als Polaren der Ellipse betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

279. Über der kleineren Achse der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ als Durchmesser ist ein Kreis beschrieben. Eine Polare der Ellipse möge als Tangente an diesem Kreise fortgleiten. Auf welcher Linie bewegt sich der Pol?

280. Die Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ mögen als Polaren der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ betrachtet werden. Es ist die Gleichung der Kurve zu bestimmen, auf der die zugehörigen Pole liegen.

281. Der Pol P möge

α) auf dem Kreise $x^2 + y^2 = a^2$,
β) auf dem Kreise $x^2 + y^2 = b^2$,
γ) auf dem Kreise $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$

fortrücken. Welches ist in jedem einzelnen Falle die Gleichung der Enveloppe der Polaren bezüglich der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$?

282. Über der großen Achse $2a$ ist ein System von Ellipsen konstruiert, welches der Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ entspricht (die variabele Konstante ist b). Auf welcher Linie liegen die Pole, wenn die Gerade $Lx + My + N = 0$ als Polare bezüglich der Ellipsen des Systems betrachtet wird?

283. Gegeben ist ein System konfokaler Ellipsen, welches der Gleichung $a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2 = a^2(a^2 - e^2)$ entspricht. (Die variabele Konstante ist a.) Welches ist der geometrische Ort des Poles, wenn die Gerade $Lx + My + N = 0$ als Polare bezüglich der Ellipsen des Systems gilt?

284. Über der Achse $2a$ ist ein System von Ellipsen konstruiert. Welche Lage haben die Polaren des Punktes P (x_1, y_1) bezüglich der Ellipsen des Systems?

Durchmesser der Ellipse.

285. Welches ist die Gleichung der Polare des unendlich fernen Punktes P bezüglich der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$?

286. In welchem Verhältnis wird jede nach dem unendlich fernen Punkte P gerichtete Sehne durch die zugehörige Polare (Durchmesser) geteilt?

287. Welcher Gleichung entspricht die Sehnenschar der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, von denen jede von dem Durchmesser $y = Ax$ halbiert wird?

288. Die Gleichung eines Durchmessers der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist $y = Mx$. Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers?

289. In der Ellipse $13x^2 + 11y^2 = 143$ entspricht ein Durchmesser der Gleichung $y = \frac{3}{2}x$. Es soll durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ eine Sehne gezogen werden, welche von dem gegebenen Durchmesser halbiert wird.

290. In der Fläche der Ellipse $36y^2 + 9x^2 = 324$ ist der Punkt $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ gegeben. Es soll die Gleichung der Sehne bestimmt werden, die in diesem Punkte halbiert wird.

291. Gegeben ist die Ellipse $15y^2 + 4x^2 = 60$. Durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = \frac{3}{2}$ ist ein Durchmesser gezogen. Welches ist

die Gleichung des konjugierten Durchmessers? In welchen Punkten schneiden die Durchmesser die Ellipse?

292. In einer Ellipse ist ein Durchmesser gezogen. Der konjugierte Durchmesser ist durch Konstruktion zu finden.

293. Von einer gegebenen Ellipse ist die Lage des Mittelpunktes durch Konstruktion zu bestimmen.

294. Der Punkt P auf der Peripherie einer Ellipse ist mit den Endpunkten eines Durchmessers derselben verbunden. Es ist zu zeigen, daß durch diese Sehnen die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser bestimmt sind.

295. In einer Ellipse sind zwei konjugierte Durchmesser zu ziehen, welche einen gegebenen Winkel miteinander einschließen.

296. Ein Durchmesser der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ fällt mit der Geraden $y = Mx$ zusammen. In den Endpunkten dieses Durchmessers sind Tangenten an die Ellipse gelegt. Welche Winkel schließen dieselben mit dem konjugierten Durchmesser ein?

297. An eine Ellipse ist in einem gegebenen Punkte P derselben eine Tangente zu legen.

298. An eine Ellipse sind Tangenten in gegebener Richtung zu legen.

299. Gegeben sind vier Durchmesser $y = M_1x$, $y = M_2x$, $y = M_3x$, $y = M_4x$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Es ist zu zeigen, daß das Doppelverhältnis derselben gleich dem der konjugierten Durchmesser ist.

300. Wie läßt sich nachweisen, daß die konjugierten Durchmesser der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ein involutorisches Strahlenbüschel bilden?

301. Von der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind zwei Paare konjugierter Durchmesser gegeben

$$y - M_1x = 0,\ y + \frac{b^2}{a^2M_1}x = 0;\quad y - M_2x = 0,\ y + \frac{b^2}{a^2M_2}x = 0.$$

Es sollen die Gleichungen der Doppelstrahlen des involutorischen Strahlenbüschels bestimmt werden.

302. In der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ seien die Endpunkte je zweier konjugierten Durchmesser miteinander verbunden. Welches ist die Gleichung der Kurve, die von allen diesen Ellipsensehnen berührt wird?

303. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der Durchmesser $y = Mx$. Welche Länge hat dieser Durchmesser? Welche Länge besitzt der konjugierte Durchmesser?

Beispiel. $49y^2 + 9x^2 = 441$, $y = \frac{5}{4}x$.

304. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und auf derselben der Punkt (x_1, y_1). Welchen Winkel schließt der durch diesen Punkt gehende Durchmesser mit dem konjugierten ein? Wie lang ist der konjugierte Durchmesser? Was wird aus der Ellipse, wenn je zwei konjugierte Durchmesser einen rechten Winkel einschließen?

Beispiel. $25y^2 + 4x^2 + 100$; $x_1 = 4$, $y_1 = \frac{6}{5}$.

305. Nach dem Punkte P (x_1, y_1) einer Ellipse sind die beiden Brennstrahlen gezogen, außerdem aber der Durchmesser konstruiert, welcher dem durch P gehenden konjugiert ist. In welcher Beziehung steht das Rechteck aus den Brennstrahlen zu dem Quadrate über dem halben konjugierten Durchmesser?

306. In der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, wo $a^2 = 3b^2$ ist, schließen zwei konjugierte Durchmesser einen Winkel von 120^0 ein. Unter welchen Winkeln sind dieselben gegen die Hauptachse geneigt?

307. Die beiden Achsen einer Ellipse sind $2a$ und $2b$, zwei konjugierte Durchmesser derselben $2a_1$ und $2b_1$, der von den beiden letzteren eingeschlossene Winkel φ. Welche Beziehungen lassen sich zwischen diesen Größen aufstellen?

308. Gegeben sind zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse $2a_1 = 14$, $2b_1 = 10$ und der von diesen eingeschlossene Winkel $\varphi = 110^0$. Wie groß sind die Hauptachsen der Ellipse?

309. Die Gleichung einer Ellipse ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Welche konjugierten Durchmesser derselben sind untereinander gleich? Welchen Winkel φ schließen beide ein? Unter welchen Winkeln sind dieselben gegen die Hauptachse geneigt?

Beispiel. $64y^2 + 25x^2 = 1600$.

310. In der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind die Endpunkte der beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ verbunden. Wie groß ist der Inhalt des eingeschriebenen Parallelogramms?

311. In den Endpunkten der beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ sind Tan-

genten an die Kurve gelegt. α) Welches ist der Inhalt des umschriebenen Parallelogramms? β) Es ist nachzuweisen, daß auch die Diagonalen dieses Parallelogramms konjugierte Durchmesser der Ellipse sind.

312. Gegeben sind zwei konjugierte Durchmesser einer Ellipse $2a_1$ und $2b_1$. Es soll die Gleichung der Kurve für diese beiden Durchmesser als Koordinatenachsen bestimmt werden. (a_1 sei gegen die Hauptachse unter dem Winkel α, b_1 unter dem Winkel α_1 gegen dieselbe geneigt.)

313. Die beiden konjugierten Durchmesser einer Ellipse $2a_1$ und $2b_1$ werden als Koordinatenachsen betrachtet. Welche Bedingungsgleichung muß erfüllt sein, wenn die Ellipse von der Geraden $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$ berührt werden soll?

314. Die Gleichung der Ellipse auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ als Koordinatenachsen bezogen ist $a_1^2y^2 + b_1^2x^2 = a_1^2b_1^2$. Welches ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) derselben?

315. Welches sind die Koordinaten des Poles, wenn die Gerade $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$ als Polare bezüglich der Ellipse $a_1^2y^2 + b_1^2x^2 = a_1^2b_1^2$ betrachtet wird?

316. Die Verlängerungen der beiden konjugierten Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ werden von einer Tangente, deren Berührungspunkt P ist, in den Punkten R und S geschnitten. Wie groß ist das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Tangente PR und PS?

317. In den Endpunkten eines Durchmessers K und K_1 sind Tangenten an eine Ellipse gelegt. Eine dritte Tangente, deren Berührungspunkt P ist, schneidet die erste im Punkte R, die zweite im Punkte S. Wie groß ist das Rechteck, welches sich aus den Abschnitten der dritten Tangente PR und PS bilden läßt?

318. In den Endpunkten K und K_1 des Durchmessers $2a_1$ sind Tangenten an eine Ellipse gelegt. Eine dritte Tangente berührt die Kurve im Punkte P und schneidet die erste Tangente in R, die zweite in S. Wie groß ist das Rechteck aus den Abschnitten der beiden parallelen Tangenten KR und K_1S?

319. Durch einen Brennpunkt einer Ellipse sind zwei Sehnen gezogen, welche zwei beliebigen konjugierten Durchmessern der Kurve parallel laufen. Wie groß ist die Summe dieser beiden Sehnen?

Die Ellipse als geometrischer Ort.

320. In dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ ist jede Ordinate im Verhältnis m zu n geteilt. Auf welcher Kurve liegen die Teilpunkte?

Beispiel. $x^2 + y^2 = 36$; $m = 1$, $n = 1$.

321. Von den Punkten des Kreises $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ sind Lote auf die Y-Achse gefällt und jedes derselben halbiert. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes?

322. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Durch den obern Endpunkt der kleineren Achse P sind Sehnen gezogen und jede derselben halbiert. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes?

323. Auf welcher Kurve liegen die Spitzen aller Dreiecke, welche den Umfang u haben und über der Grundlinie c konstruiert sind?

324. Über der konstanten Grundlinie c sind Dreiecke konstruiert, so daß $4t_c^2 + 5h_c^2 = c^2$ ist (t_c ist die Schwerpunkttransversale, welche durch den Halbierungspunkt von c geht, h_c die Höhe auf c). Welches ist die Gleichung der Kurve, auf welcher die Spitzen der Dreiecke liegen?

325. Über der konstanten Grundlinie c sind Dreiecke konstruiert, in denen das Produkt der Tangenten der Winkel an der Grundlinie gleich der positiven Konstanten k ist. Auf welcher Linie befinden sich die der gemeinschaftlichen Grundlinie gegenüberliegenden Spitzen?

326. Eine gerade Linie bewegt sich so, daß zwei Punkte derselben A und B auf den Schenkeln eines rechten Winkels fortrücken. Welche Linie beschreibt ein Punkt P der Geraden? Die Strecke AP werde $= b$, ferner $PB = a$ gesetzt.

327. An die Parabel $y^2 = px$ ist im Punkte $M(x_1, y_1)$ eine Tangente gelegt, welche die Scheiteltangente in P schneidet. Das in P auf dieser Tangente errichtete Lot schneidet die Verbindungslinie zwischen dem Koordinatenanfangspunkte und dem Berührungs-

punkte in Q. Welche Kurve beschreibt Q, wenn der Punkt M längs der Parabel fortrückt?

328. Gegeben sind zwei parallele Gerade t_1 und t_2, deren Abstand d beträgt, und der Punkt P_1 auf t_1. Es soll der geometrische Ort für einen Punkt zwischen beiden bestimmt werden, dessen Entfernung von P_1 mittlere Proportionale ist zwischen seinen Abständen von t_1 und t_2.

329. Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks haben eine konstante Länge. Die Grundlinie fällt mit der X-Achse, der eine Endpunkt derselben mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Welche Linie beschreibt der Punkt P des zweiten Schenkels, wenn sein Endpunkt längs der X-Achse fortgleitet?

330. Von einem Dreieck sind die Längen zweier Seiten a und b konstant, der Schnittpunkt derselben liegt im Koordinatenanfangspunkte und der veränderliche eingeschlossene Winkel wird durch die X-Achse halbiert. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes der dritten Seite?

331. Von einem Dreieck ist die Grundlinie c, sowie die Summe der beiden andern Seiten $a + b$ konstant. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises?

332. Die Seite c des Dreiecks ABC fällt mit der X-Achse, der Eckpunkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen, die der Seite c gegenüberliegende Spitze C bewegt sich auf der Ellipse $a_1^2 y_1^2 + b_1^2 x_1^2 = a_1^2 b_1^2$ fort. Welche Linie beschreibt in diesem Falle der Schwerpunkt des Dreiecks?

333. Über der großen Achse der Ellipse $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax_1 - x_1^2)$ als Grundlinie ist ein Dreieck konstruiert, dessen Spitze auf der Ellipse fortgleitet. Welches ist der geometrische Ort des Höhenpunktes?

334. Die Ellipse $y^2 + qx^2 - px = 0$ wird von der Geraden $y = \frac{y_1}{x_1} x$ in dem Punkte $P\ (x_1, y_1)$ geschnitten. Von P ist ein Lot auf die Hauptachse gefällt und von dem Fusspunkte des Lotes eine Parallele zu der Geraden $y = \frac{y_1}{x_1} x$ gezogen, welche die durch P gehende Parallele zur Hauptachse in Q trifft. Welches ist der geometrische Ort des Punktes Q?

335. Über dem Abstande der Brennpunkte der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist ein Dreieck konstruiert, dessen andere Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel laufen. Welches ist der geometrische Ort der Spitze?

336. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ und der zugehörige Hauptkreis $y^2 + x^2 = a^2$. Zu der Abscisse x_1 gehört der Punkt A der Ellipse und der Punkt B des Kreises. Verbindet man A mit dem Brennpunkte $(e, 0)$, B mit dem Mittelpunkte des Kreises, so schneiden sich beide Linien im Punkte P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

337. In den beiden konzentrischen Kreisen

$$y^2 + x^2 = r_1^2 \quad \text{und} \quad y^2 + x^2 = r_2^2$$

sind zwei zusammenfallende Radien gezogen. Von dem Endpunkte des größeren r_1 ist ein Lot auf die X-Achse gefällt und durch den Endpunkt von r_2 eine Parallele zur X-Achse gezogen, welche das Lot im Punkte K schneidet. Welche Linie beschreibt der Punkt K, wenn beide Radien um den Mittelpunkt mit derselben Winkelgeschwindigkeit gedreht werden?

338. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Von dem Punkte $(0, r)$ des Kreises ist ein Strahl gezogen, welcher die Peripherie des Kreises außerdem in M und die X-Achse in N schneidet. Es ist ferner der Punkt N mit dem festen Punkte $(0, b)$ verbunden, und diese Verbindungslinie schneidet die Ordinate des Punktes M in K. Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt K fort, wenn der Punkt N längs der X-Achse fortgeschoben wird?

339. Gegeben ist der Kreis $y^2 + x^2 = r^2$. Q ist der obere Endpunkt des vertikalen Durchmessers, N ein zweiter fester Punkt auf demselben, S ein beliebiger Punkt der Peripherie. Zieht man von Q einen Strahl nach dem Fußpunkte F der Ordinate des Punktes S, durch N eine Parallele zu diesem Strahle, welche die X-Achse in H schneidet, so wird das Lot, in H auf der X-Achse errichtet, die durch S zur X-Achse gezogene Parallele in P schneiden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

340. Gegeben ist der Kreis $y^2 = 2rx - x^2$. Der mit der X-Achse zusammenfallende Durchmesser ist AB. Durch A ist eine bewegliche Sehne gezogen, welche den Kreis in C schneidet. Die

Ordinate dieses Punktes werde verdoppelt und der Endpunkt der Verlängerung mit B verbunden. Diese letztere Verbindungslinie möge die Verlängerung von AC im Punkte P schneiden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

341. Die Gleichung eines gegebenen Kreises ist $y^2 = 2rx - x^2$. Durch den Koordinatenanfangspunkt O ist die Sehne OC gezogen, von C ein Lot auf die X-Achse gefällt und durch den Fußpunkt D desselben eine Parallele zu OC gelegt, welche eine Parallele zur X-Achse, die durch C geht, im Punkte P schneidet. Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt P fort, wenn die Sehne OC um O gedreht wird?

342. Ein gegebener Kreis entspricht der Gleichung $y^2 + x^2 = 25$. In diesem Kreise liegt der Punkt P (0, 3). Auf welcher Linie befinden sich die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt P gehen und den gegebenen Kreis von innen berühren?

343. Zwei Kreise sind gegeben, welche den Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 - rx = 0$$

entsprechen. Der zweite berührt den ersten von innen. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf der die Mittelpunkte aller Kreise liegen, welche die gegebenen Kreise berühren?

344. Von den beiden Kreisen $y^2 + x^2 = 16$ und $y^2 + x^2 - 2x = 0$ liegt der zweite vollständig in dem ersten. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der den kleineren von außen, den größeren von innen berührt?

345. Gegeben sind die beiden Kreise $y^2 + x^2 = 16$ und $y^2 + x^2 - 2x = 0$. Es ist ein Kreis konstruiert, der den zweiten Kreis einschließend berührt und von dem ersten einschließend berührt wird. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes?

346. In einem Kreise, der mit dem Radius $2a$ um den Koordinatenanfangspunkt beschrieben ist, rollt auf der Peripherie desselben ein anderer fort, dessen Radius a ist. Welche Kurve beschreibt der Halbierungspunkt P eines bestimmten Radius des bewegten Kreises?

347. Die Tangenten der Parabel $y^2 = 2rx$ mögen als Polaren bezüglich des Kreises $x^2 + y^2 - 2rx - r^2 = 0$ betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

Konstruktionsaufgaben.

348. Von einer Ellipse sind die beiden Brennpunkte F und F_1 und ein Punkt des Umfanges P gegeben. Die Längen der Achsen sind durch Konstruktion zu finden.

349. Zur Konstruktion einer Ellipse sind die beiden Scheitelpunkte A und B, ferner ein Punkt C der einen Direktrix gegeben.

350. Gegeben sind die beiden Brennpunkte F und F_1 einer Ellipse, sowie eine Tangente derselben t. Durch Konstruktion sind die Achsen und der Berührungspunkt der Tangente zu bestimmen.

351. Die Richtung der Hauptachse, ein Brennpunkt F, eine Tangente t, sowie deren Berührungspunkt P sind gegeben. Die Lage des zweiten Brennpunktes und die Größe der Achsen sind zu finden.

352. Die Länge der Hauptachse $2a$, sowie die Lage eines Brennpunktes F und einer Tangente t mit deren Berührungspunkte P sind bekannt. Die Lage des zweiten Brennpunktes, sowie die Länge und Lage der Nebenachse sind zu bestimmen.

353. Man kennt die Lagen zweier Tangenten t und t_1 mit den Berührungspunkten P und P_1, sowie die Lage des einen Brennpunktes F. Wo liegt der zweite Brennpunkt? Welche Längen haben die Achsen?

354. Von einer Ellipse ist ein Brennpunkt F gegeben, sowie ein Durchmesser d der Länge und Lage nach. Zu bestimmen ist der andere Brennpunkt, der konjugierte Durchmesser, die Hauptachse und die Nebenachse.

355. Gegeben sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und ein Brennpunkt F einer Ellipse. Man soll durch Konstruktion den zweiten Brennpunkt und die Achsen finden.

356. Wenn ein Brennpunkt F, die Richtung der Hauptachse und die Lagen zweier Tangenten t_1 und t_2 gegeben sind, wie findet man den zweiten Brennpunkt?

357. Von einer Ellipse sind der eine Brennpunkt F_1, ein Punkt der Kurve P_1 und die beiden Tangenten t_1 und t_2 gegeben. Wie findet man den zweiten Brennpunkt?

358. Gegeben sind von einer Ellipse die beiden Tangenten t_1 und t_2, der Berührungspunkt der ersteren P_1 und der Brennpunkt F_1. Wie findet man durch Konstruktion den Berührungspunkt von t_2?

359. Gegeben sind der Punkt O als Mittelpunkt, der eine Brennpunkt F und die Gerade MN als Tangente einer Ellipse. Es sollen die beiden Punkte der Ellipse gefunden werden, in denen sie von den beiden von einem Punkte P ausgehenden Tangenten berührt wird.

360. Von einer gegebenen Ellipse sind durch Konstruktion die Brennpunkte, die Achsen und die Tangenten zu finden, welche sich in einem gegebenen Punkte P schneiden.

361. Gegeben ist die Richtung der Hauptachse, der Mittelpunkt O und eine Tangente t mit ihrem Berührungspunkte P. Es sollen die Brennpunkte und die zugehörigen Direktrixen gefunden werden.

362. Zur Bestimmung der Brennpunkte und der Direktrixen einer Ellipse sind gegeben die Lage und Größe des Hauptkreises und die Lage einer Tangente t_1, welche die Ellipse im Punkte P_1 berühren soll und von dem Kreise in den Punkten A und B geschnitten wird.

363. Von einer Ellipse ist die Lage und Größe der Hauptachse $2a$ bekannt, ebenso die Richtung einer Tangente t. Wie findet man die Lage der Brennpunkte und der Direktrixen?

364. Bekannt sind die Lage und Größe der größeren Achse $2a$, sowie die Lage eines Punktes P der Ellipse. Man soll die Länge der kleineren Achse, sowie die Lage der Brennpunkte bestimmen.

365. Gegeben sind die Richtung der größeren Achse, die Lage des Mittelpunktes O und zweier Punkte der Kurve P_1 und P_2. Wie findet man die Längen der Achsen und die Lage der Brennpunkte?

366. Wie findet man die Längen der Achsen und die Lage der Brennpunkte, wenn die Richtung der Hauptachse und zwei Tangenten t_1 und t_2 mit ihren Berührungspunkten P_1 und P_2 gegeben sind?

367. Die Lage und Länge der kleineren Achse $2b$ und die Lage eines Punktes P der Ellipse sind bekannt. Man soll die größere Achse und die Lage der Brennpunkte finden.

368. Gegeben sind die Lage und Länge der größeren Achse $2a$ und eine Tangente t. Es soll die Lage und Länge der kleineren Achse durch Konstruktion gefunden werden.

369. Wie findet man die Richtungen der Achsen einer Ellipse, wenn zwei konjugierte Durchmesser derselben $AA_1 = 2a_1$ und $BB_1 = 2b_1$ der Lage und Größe nach gegeben sind?

370. Die Richtung der Hauptachse, ein Punkt P, die zugehörige Polare p und eine Direktrix d einer Ellipse sind gegeben. Es soll der Brennpunkt gefunden werden, welcher der Direktrix d zugehört.

371. Von einer Ellipse sind außer einem Brennpunkt und der Länge der Nebenachse $2b$

α) zwei Tangenten t_1 und t_2,

β) eine Tangente t_1 mit ihrem Berührungspunkte P_1

gegeben. Die Lage des zweiten Brennpunktes und die Größe der Hauptachse sind zu finden.

Flächeninhalt der Ellipse.

372. Von einer Ellipse, deren Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ ist, soll der Inhalt bestimmt werden.

Beispiel. $9y^2 + 4x^2 = 36$.

373. Die größere Achse einer Ellipse ist $2a = 10$, die lineare Excentricität derselben $e = 3{,}5$. Welches ist der Inhalt derselben?

374. Die Seite des einer Ellipse eingeschriebenen Rhombus ist s, die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Halbachsen. Welches ist der Inhalt der Ellipse?

375. Gegeben sind zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Die Ordinaten der Punkte sind verlängert bis zum Durchschnitt mit dem Hauptkreise. In welchem Verhältnis steht das Segment des Hauptkreises zu dem der Ellipse?

376. Gegeben sind zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, und die entsprechenden Punkte des Hauptkreises sind durch Verlängerung der Ordinaten bestimmt. Verbindet man die Punkte der Ellipse und die entsprechenden Punkte des Kreises mit dem Mittelpunkte, so erhält man zwei

entsprechende Sektoren. In welchem Verhältnis stehen diese entsprechenden Sektoren?

377. Durch den Mittelpunkt der Ellipse $25y^2 + 9x^2 = 225$ ist ein Strahl gelegt, welcher unter einem Winkel von 60^0 gegen die Hauptachse geneigt ist. Welchen Inhalt hat der Sektor, welcher von der Hauptachse, dem Strahle und dem dazwischen liegenden Bogen begrenzt wird?

378. In der Ellipse $11y^2 + 5x^2 = 55$ sind durch den Mittelpunkt zwei Strahlen gezogen, welche gegen die Hauptachse unter den Winkeln 30^0 und 45^0 geneigt sind. Welchen Inhalt hat der von denselben eingeschlossene Sektor?

379. Von einer Ellipse sind die Halbachsen $a = 7$, $b = 3$. Wie groß sind die Segmente der Ellipse, in welche dieselbe von einem Parameter zerlegt wird?

380. In der Ellipse $25y^2 + 16x^2 = 1600$ ist lotrecht zu der größeren Achse eine Sehne von der Länge $2\sqrt{15}$ gezogen. Welchen Inhalt haben die beiden Teile, in welche die Ellipse durch die Sehne zerlegt wird?

381. Die Hauptachse der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ wird durch eine zu derselben lotrechte Sehne im Verhältnis 1 zu 3 geteilt. In welchem Verhältnis stehen die dadurch entstandenen Segmente der Ellipse zu einander?

382. Gegeben ist die Ellipse $25y^2 + 9x^2 = 225$. Über dem Abstande der beiden Brennpunkte derselben als Durchmesser ist ein Kreis konstruiert. In welche Teile wird die Ellipse durch diesen Kreis zerlegt?

383. Gegeben ist die Ellipse $25y^2 + 16x^2 = 400$. Es ist eine Parabel konstruiert, welche den positiven Teil der Hauptachse zur Achse, den Mittelpunkt zum Scheitel und mit der Ellipse den einen Brennpunkt gemein hat. Wie groß sind die beiden Teile, in welche die Ellipse von der Parabel zerlegt wird?

Die Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel.

384. Auf der X-Achse liegen die beiden Punkte F $(e, 0)$ und F_1 $(-e, 0)$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, für den die Differenz der Entfernungen von den beiden festen Punkten F und F_1 gleich $2a$ ist?

385. Die Hauptachse einer Hyperbel $2a = 16$ fällt mit der X-Achse zusammen, die Nebenachse $2b = 14$ mit der Y-Achse. Welches ist die Gleichung derselben?

386. Die lineare Excentricität einer Hyperbel ist $e = 13$, die Nebenachse $2b = 24$. Welches ist die Gleichung derselben, wenn die Hauptachse mit der X-Achse, die Nebenachse mit der Y-Achse zusammenfällt?

387. Die doppelte lineare Excentricität $2e$ einer Hyperbel ist dreimal so groß als die Hauptachse $2a$ derselben. Welches ist die Gleichung der Hyperbel? (Über die Lage der Achsen s. Aufg. 386.)

388. Gegeben ist die Hauptachse einer Hyperbel $2a = 8$ und die Koordinaten eines Punktes der Kurve $x_1 = 10$, $y_1 = 25$. Welches ist die Gleichung derselben? (Über die Lage der Achsen s. Aufg. 384.)

389. Zur Bestimmung der Gleichung einer Hyperbel, deren Hauptachse mit der X-Achse und deren Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt, sind die Koordinaten zweier Punkte der Kurve (x_1, y_1) und (x_2, y_2) gegeben.

Beispiel. $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = 8$, $y_2 = -10$.

390. Wann sind zwei Hyperbeln kongruent?

391. Für welchen Punkt der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist die Abscisse gleich der Ordinate?

392. Wie groß ist der Parameter, d. i. eine zur Hauptachse lotrechte Brennpunktsehne der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$?

393. Die Hauptachse einer Hyperbel fällt mit der X-Achse, der Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn der Parameter derselben $= p$, die doppelte lineare Excentricität $= 2e$ ist?

Beispiel. $p = 8$, $2e = 10$.

394. Jede Ordinate der gleichseitigen Hyperbel $y^2 - x^2 = -a^2$ läßt sich als mittlere Proportionale zwischen zwei Strecken darstellen. Welches sind diese Strecken?

395. Gegeben ist die Gleichung einer Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und die Koordinaten eines Punktes P derselben x_1, y_1. Welches sind die Gleichungen der Brennstrahlen, die sich nach diesem Punkte ziehen lassen? Wie lang sind dieselben?

Beispiel. $9y^2 - 20x^2 = -180$; $x_1 = 5$, $y_1 > 0$.

396. In welcher Beziehung steht die Summe der beiden Brennstrahlen eines Punktes der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ zu der Abscisse desselben?

397. Die Gleichung einer Hyperbel ist $25y^2 - 9x^2 = -225$. Nach dem Punkte $x_1 = 13$, $y_1 = 7{,}2$ derselben sind die Brennstrahlen gezogen. Welchen Winkel schließen diese beiden Geraden mit einander ein?

398. Für welchen Punkt der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ stehen die beiden Brennstrahlen lotrecht zu einander?

399. Für welchen Punkt der Hyperbel $16y^2 - x^2 = -16$ ist das Rechteck aus den Brennstrahlen gleich $100\square$?

400. Von dem Fußpunkte einer Ordinate y_1 der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Tangente t_1 an den Kreis über der Hauptachse gelegt. Wie verhält sich die Tangente t_1 zu der Ordinate y_1 der Hyperbel? Wie gestaltet sich das Verhältnis, wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist?

401. Von dem Fußpunkte einer Ordinate (y_1) der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Tangente t_1 an den Kreis über der Hauptachse gezogen. Es soll der Winkel bestimmt werden, unter dem diese Tangente gegen die X-Achse geneigt ist.

402. Die Achsen einer Hyperbel $2a = 14$ und $2b = 20$ laufen den Koordinatenachsen parallel, die Koordinaten des Mittelpunktes sind $x_1 = 5$, $y_1 = -4$. Welches ist die Gleichung der Hyperbel?

403. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welche Gestalt nimmt die Gleichung dieser Kurve an, wenn man die Gerade $x = a$ als Y-Achse betrachtet? (Scheitelgleichung.)

404. Die Scheitelgleichung einer Hyperbel ist $y^2 = 16\frac{1}{3}x + 1\frac{13}{36}x^2$. Wie groß sind die Achsen der Kurve?

405. Für die Scheitelgleichung einer Hyperbel sind die Koordinaten eines Punktes x_1, y_1 und die Größe des Parameters p

gegeben. Wie groß ist die Hauptachse der Hyperbel? Wie lautet die Scheitelgleichung?

406. Der Abstand der Brennpunkte $2e$ und die Größe der Nebenachse $2b$ einer Hyperbel sind bekannt. Welches ist die Scheitelgleichung der Hyperbel?

407. Welches ist die Polargleichung einer Hyperbel, wenn der Mittelpunkt derselben als Pol, die Hauptachse als Achse angenommen wird?

408. Es soll die Polargleichung einer Hyperbel, deren Achsen $2a$ und $2b$ sind, bestimmt werden, wenn einer der beiden Brennpunkte als Pol und die Verbindungslinie beider als Achse angesehen wird.

409. Wie groß ist das Rechteck, welches aus den Abschnitten einer Brennpunktsehne einer Hyperbel gebildet wird?

410. Für welche Anomalie ist der Radiusvektor einer Hyperbel a) gleich dem Parameter? b) gleich der Hauptachse? c) gleich dem Abstande der beiden Brennpunkte, wenn der rechtsliegende Brennpunkt als Pol angesehen wird?

411. Wie groß ist das harmonische Mittel zwischen den Abschnitten einer Brennpunktsehne der Hyperbel?

412. Durch einen Brennpunkt einer Hyperbel sind zwei Sehnen s_1 und s_2 gezogen, welche rechtwinklig zu einander stehen. Wie groß ist die Summe der reciproken Werte derselben?

Die Hyperbel und die Gerade.

413. Es sollen die Koordinaten der Punkte bestimmt werden, in denen die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ von der Geraden $y = Mx + n$ geschnitten wird.

Beispiele. 1) $4y^2 - 9x^2 = -36, \quad y = \frac{1}{2}x - 3;$
2) $9y^2 - 25x^2 = -225, \quad 12y + 25x = 45;$
3) $5y^2 - 16x^2 = -80, \quad y = 4x + 1.$

414. Welches ist die geometrische Bedeutung der Relation

$$b^2 + n^2 - a^2M^2 \gtreqless 0?$$

415. Wo liegen die Punkte, in denen die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ von den Geraden, welche der Gleichung $y = \pm\frac{b}{a}x + n$

entsprechen, geschnitten wird? Wie gestalten sich die Resultate, wenn $n = 0$ gesetzt wird?

416. In welchen Punkten wird die Hyperbel $y^2 = 9x + 11a^2$ von der Geraden $y = 4x + 3$ geschnitten?

417. Welches ist die Gleichung einer Hyperbel, deren Achsen $2a$ und $2b$ mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, in Linienkoordinaten?

418. Gegeben der Kreis $y^2 + (x + k)^2 = r^2$ und der Punkt $P(k, 0)$. Von dem letzteren sind alle möglichen Sekanten in den Kreis gezogen, jedes der beiden Segmente einer Sekante ist halbiert und in den Halbierungspunkten sind Lote errichtet. Die Kurve, welche diese Lote einhüllt, ist zu bestimmen.

419. Gegeben der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und der Punkt $P(x_1, 0)$. Durch den letzteren geht der eine Schenkel eines rechten Winkels, während der Scheitel auf der Peripherie des Kreises fortgleitet. Welche Kurve umhüllt die Lagen des anderen Schenkels?

420. Gegeben sind zwei Gerade $y = \pm d$ und das Kreisbüschel $x^2 + y^2 - 2kx - f^2 = 0$. $(d < f.)$ In jedem Kreise des Büschels sind die beiden Durchmesser gezogen, welche die Schnittpunkte des Kreises und der beiden Geraden verbinden. Welches ist die Enveloppe dieser Durchmesser?

421. In welchen Punkten schneidet die Hyperbel

$$9y^2 - 25x^2 - 54y - 50x + 281 = 0$$

die Koordinatenachsen? Welches ist die Gleichung dieser Hyperbel in Linienkoordinaten?

422. Durch den Punkt $x_1 = 12$, $y_1 = 3$ ist in die Hyperbel $9y^2 - 16x^2 = -144$ eine Sehne zu ziehen, die in diesem Punkte halbiert wird. Welche Stücke schneidet diese Sehne auf den Koordinatenachsen ab? Unter welchem Winkel ist dieselbe gegen die X-Achse geneigt?

423. Vom Koordinatenanfangspunkte sind an die Hyperbel $9y^2 - 25x^2 - 18y - 100x + 134 = 0$ Tangenten zu legen. Welches sind die Gleichungen derselben?

424. In die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist ein Quadrat einzuzeichnen. Welches sind die Koordinaten der Eckpunkte?

425. In die Hyperbel $5y^2 - 3x^2 = -10$ soll ein gleichseitiges Dreieck beschrieben werden, dessen eine Spitze in einem Scheitel liegt. Welches sind die Gleichungen der Seiten?

426. Es soll ein Rechteck in die Hyperbel $12y^2 - 7x^2 = -112$ eingezeichnet werden, dessen Inhalt gleich dem Quadrate über der Hauptachse ist. Welches sind die Koordinaten der Ecken?

427. Gegeben ist eine Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. In dieselbe ist ein Rechteck zu zeichnen, dessen Seiten sich wie m zu n verhalten. Die Koordinaten der Ecken sind zu bestimmen.

Beispiel. $4y^2 - x^2 = -60$; $m = 2$, $n = 5$.

Tangente und Normale der Hyperbel.

428. An die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist im Punkte (x_1, y_1) derselben eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben? Welche Stücke schneidet sie auf den Koordinatenachsen ab?

Beispiele. a) $13y^2 - 5x^2 = -65$; $x_1 = 13$, $y_1 = 2\sqrt{15}$;
b) $7y^2 - 16x^2 = -112$; $x_1 = -4$, $y_1 < 0$.

429. Die Gerade $y = Mx + n$ sei eine Tangente der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welches sind die Koordinaten des Berührungspunktes?

430. Ist die Gerade $35x - 9y = 148$ eine Tangente der Hyperbel $7x^2 - 3y^2 = 148$?

431. Von den Brennpunkten der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind Lote auf die Tangenten der Kurve gefällt. Welches ist der geometrische Ort der Fußpunkte derselben?

432. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Von dem Brennpunkte $(e, 0)$ sind Lote auf alle Tangenten des zugehörigen Hyperbelzweiges gefällt. Auf welcher Kurve liegen die Gegenpunkte des Brennpunktes?

433. Für welche Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind die Tangenten derselben unter dem gegebenen Winkel α gegen die X-Achse geneigt?

Beispiel. $100y^2 - 9x^2 = -900$, $\angle\alpha = 60^0$.

434. Von einem Punkte P soll an eine gegebene Hyperbel eine Tangente gelegt werden.

435. Durch Konstruktion sind diejenigen Tangenten einer gegebenen Hyperbel zu bestimmen, welche der Geraden g parallel laufen.

436. Die Hyperbel $9y^2 - 16x^2 = -144$ soll durch eine Gerade berührt werden, welche der Geraden $y = 4x - 3$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben?

437. Wie groß ist der Inhalt des Rechtecks, welches durch die Lote gebildet wird, die sich von den Brennpunkten der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ auf eine Tangente derselben fällen lassen?

438. In jedem der Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$, dessen Brennstrahlen unter dem Winkel α zu einander geneigt sind, sollen Tangenten an die Kurve gezogen werden. Welches sind die Gleichungen derselben?

Beispiel. $7y^2 - 9x^2 = -63$, $\angle \alpha = 90^0$.

439. In dem Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist die Normale konstruiert. Welches ist die Gleichung derselben?

Beispiel. $25y^2 - 64x^2 = -1600$; $x_1 = 13$, $y_1 > 0$.

440. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Im Punkte (x_1, y_1) sind Tangente und Normale konstruiert. Welche Länge hat die Tangente? Welche Länge die Normale? Wie lang ist die Subtangente? Wie lang die Subnormale? Wie lauten die Resultate, wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist?

Beispiel. $7y^2 - 16x^2 = -112$; $x_1 = 4$, $y_1 > 0$.

441. Nach einem Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind die Radienvektoren gezogen, und zwar ist der Neigungswinkel des einen zur X-Achse doppelt so groß als der des andern. Wie lang ist die Normale, die sich in diesem Punkte der Hyperbel konstruieren läßt?

Beispiel. $9y^2 - 16x^2 = -114$.

442. Gegeben ist die Gleichung der Hyperbel $4y^2 - 25x^2 = -100$ und die Länge einer Subnormale derselben $S_n = 30$. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Punktes?

443. Für welchen Punkt der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist die Subtangente gleich der Subnormale?

444. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Es sollen die Koordinaten derjenigen Punkte gesucht werden, für welche die Tangente doppelt so groß ist als die Normale.

445. Für welche Punkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ ist das Rechteck aus der Tangente und der Ordinate gleich dem Quadrate über der Normale?

446. Es ist zu zeigen, daß die Tangente an einem Punkte $P(x_1, y_1)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ den Winkel halbiert, welchen die nach dem Berührungspunkt P gezogenen Radienvektoren miteinander einschließen.

447. Gegeben ist eine Hyperbel und auf derselben der Punkt P. Wie läßt sich in diesem Punkte an die Kurve eine Tangente legen?

448. Eine Ellipse und eine Hyperbel haben die Brennpunkte gemein. Welche Winkel schließen die Tangenten beider Kurven an den Schnittpunkten ein?

449. Gegeben sind die gleichseitige Hyperbel $y^2 - x^2 = - a^2$ und der Kreis $y^2 + x^2 = 9a^2$. Unter welchen Winkeln durchschneiden sich die beiden Kurven?

450. Von dem Brennpunkte $(e, 0)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ ist ein Lot auf eine Tangente der Kurve gefällt, deren Berührungspunkt (x_1, y_1) ist. Wie groß ist das Rechteck aus dem Lot und der Normale, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht?

451. An die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ sind die beiden Scheiteltangenten gelegt und eine dritte Tangente, deren Berührungspunkt (x_1, y_1) ist. Von welchen Punkten der Hauptachse aus erscheint der Abschnitt der dritten Tangente, welcher zwischen den Scheiteltangenten liegt, unter rechtem Winkel?

452. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$. In den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind die Tangenten an dieselbe gelegt. Wie groß ist der Winkel, den die Tangenten einschließen?

Beispiel. $4y^2 - 9x^2 = - 36$; $x_1 = 3$, $y_1 > 0$; $x_2 = 4$, $y_2 < 0$.

453. Längs der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ gleiten zwei Tangenten fort, welche einen rechten Winkel einschließen. Welches ist die Gleichung des geometrischen Ortes des Scheitels des rechten Winkels? Wie gestaltet sich das Resultat, wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist?

454. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ sollen Tangenten an die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ gelegt werden. Welches sind die Gleichungen derselben?

Beispiel. $9y^2 - 25x^2 = - 225$; $x_1 = 2$, $y_1 = 5$.

Asymptoten der Hyperbel.

455. Welche Form nimmt die Gleichung einer Tangente der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ an, wenn man den Berührungspunkt in die Unendlichkeit rücken läßt?

Beispiel. $25y^2 - 49x^2 = -1225$.

456. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die sich vom Mittelpunkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ an dieselbe legen lassen?

Beispiel. $4y^2 - 81x^2 = -324$.

457. Welchen Winkel bilden die beiden Asymptoten der Hyperbel $5y^2 - 4x^2 = -100$ miteinander?

458. Von einem Brennpunkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind Lote auf die Asymptoten gefällt. Wie lang ist jedes der Lote? Welchen Inhalt hat das Viereck, welches von den Asymptoten und den Loten begrenzt wird?

459. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welche Gestalt nimmt die Gleichung der Kurve an, wenn die Asymptoten derselben zu Koordinatenachsen gewählt werden?

460. Im Punkte (x_1, y_1) ist an die Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$ eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung derselben?

461. Eine Tangente einer Hyperbel sei bis zum Durchschnitt mit den Asymptoten verlängert. Welchen Inhalt hat das Rechteck aus den beiden Abschnitten auf den Asymptoten?

462. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung $y = Mx + n$ genügen, wenn die derselben entsprechende Gerade Tangente der Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$ sein soll?

463. An die Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$ ist im Punkte (x_1, y_1) eine Tangente zu legen. Wie läßt sich die Konstruktion ausführen?

464. Es ist zu zeigen, daß jede von den Asymptoten begrenzte Tangente der Hyperbel im Berührungspunkte halbiert wird.

465. Es soll der Inhalt eines Dreiecks bestimmt werden, welches von den beiden Asymptoten und einer Tangente der Hyperbel begrenzt wird. Wie verhält sich dasselbe zu dem Rechteck aus den Koordinaten des Berührungspunktes?

466. Von einem Punkte der Hyperbel sind Parallelen zu den Asymptoten gezogen. Es soll der Inhalt des Parallelogramms bestimmt werden, welches von diesen Linien begrenzt wird.

467. Die Halbachsen einer Hyperbel sind a und b. Welches ist die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten, wenn die Abschnitte auf den Asymptoten liegen sollen?

Pol und Polare.

468. Gegeben sind die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Welches ist die Polare des Punktes P bezüglich der Hyperbel?

Beispiele. a) $9y^2 - 25x^2 = -225$; $x_1 = 1$, $y_1 = 11$.
b) $12y^2 - 7x^2 = -112$; $x_1 = -9$, $y_1 = 7$.

469. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ sind Tangenten an die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gezogen. Welches sind die Koordinaten der Berührungspunkte?

Beispiel. $6y^2 - 11x^2 = -66$; $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.

470. Die Asymptotengleichung einer Hyperbel ist $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes $P(x_1, y_1)$ bezüglich derselben?

471. Die Brennpunkte der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ mögen als Pole betrachtet werden. Welches sind die Gleichungen der zugehörigen Polaren? Welchen Gleichungen entsprechen diese Polaren, wenn die Asymptotengleichung der Hyperbel gegeben ist?

472. Wie groß sind die Stücke, welche durch die Direktrixen auf den Asymptoten der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ abgeschnitten werden?

473. Von einem Punkte $P(x_1, y_1)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist ein Strahl nach einem Brennpunkte gezogen und ein Lot auf die dem Brennpunkte zugehörige Direktrix gefällt. In welchem Verhältnis stehen diese beiden Linien?

474. Es soll der geometrische Ort eines Punktes gefunden werden, dessen Entfernung von dem Punkte $(k, 0)$ sich zu der von der Y-Achse wie m zu n verhält. $(m > n.)$

475. Von dem Punkte $P(x_1, y_1)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Parallele zu einer Asymptote gezogen und bis

zum Durchschnitt mit einer Direktrix verlängert. Wie verhält sich diese Linie zu dem Brennstrahle, der den Punkt P mit dem der Direktrix zugehörigen Brennpunkte verbindet?

476. Von einem Punkte P der Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ ist ein Strahl nach dem zugehörigen Brennpunkte $(e, 0)$ gezogen. Unter welchem Winkel schneidet dieser Strahl die Polare des Punktes P bezüglich der Hyperbel?

477. Gegeben ist eine Hyperbel und auf derselben der Punkt P. Wie läßt sich in diesem Punkte an die Kurve eine Tangente legen?

478. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Von dem Fußpunkte der Direktrix $x = \frac{a^2}{e}$ ist eine Tangente an die Hyperbel gelegt und von einem Punkte P dieser Geraden ein Lot auf die Hauptachse gefällt, welches die Hyperbel in Q schneidet. Wie verhält sich der Brennstrahl, der von Q nach $(e, 0)$ geht, zu dem Lote?

479. Der Punkt $P\ (x_1, y_1)$ ist mit dem Brennpunkte $(e, 0)$ verbunden und in diesem Brennpunkte ist auf der Verbindungslinie ein Lot errichtet. Wie groß ist der Inhalt des Dreiecks, welches das Lot, die Polare des Punktes P und die zu $(e, 0)$ gehörige Direktrix einschließen?

480. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiele. a) $9y^2 - 15x^2 + 135 = 0, \quad y = \frac{1}{4}x - 3;$

b) $25y^2 - 36x^2 + 900 = 0, \quad \frac{y}{3} - \frac{x}{4} = 1.$

481. Die Tangenten des Hauptkreises der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ mögen als Polaren der letzteren betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

482. Gegeben ist die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ und der Kreis $y^2 + x^2 = a^2 + b^2$. Eine Polare der Hyperbel gleite als Tangente an dem Kreise fort. Auf welcher Kurve bewegt sich der zugehörige Pol?

483. Gegeben ist die Hyperbel

$$a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2 = a^2(a^2 - e^2) \quad [e > a]$$

und die ihr konfokale Ellipse

$$a_1^2 y^2 + (a_1^2 - e^2) x^2 = a_1^2 (a_1^2 - e^2) \quad [e < a_1]:$$

die Tangenten der Ellipse mögen als Polaren bezüglich der Hyperbel betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

484. Gegeben ist ein System konfokaler Hyperbeln, welches der Gleichung $a^2 y^2 - (e^2 - a^2) x^2 + a^2 (e^2 - a^2) = 0$ entspricht. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ werde als Polare bezüglich jeder Hyperbel des Systems betrachtet. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

485. Der Pol P möge auf der Peripherie des Kreises $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ fortrücken. Es soll die Gleichung der Kurve bestimmt werden, welche die Polaren bezüglich der Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$ einhüllt.

486. Gegeben ist ein Büschel von Hyperbeln

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2 + k (a_1^2 y^2 - b_1^2 x^2 + a_1^2 b_1^2) = 0$$

und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Wie liegen die Polaren des Punktes bezüglich der Hyperbeln des Büschels?

Durchmesser der Hyperbel.

487. Der Punkt $P(x_1, y_1)$ möge in unendlicher Ferne liegen. Welches ist die Gleichung der Polare desselben bezüglich der Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$?

488. In welchem Verhältnis werden alle Sehnen, die nach dem unendlich fernen Pole konvergieren, durch die Polare desselben geteilt?

489. Welche Beziehung findet zwischen den Richtungskonstanten konjugierter Durchmesser der Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$ statt, von denen jeder die dem andern parallele Sehnenschar halbiert? Wie gestaltet sich das Resultat für eine gleichseitige Hyperbel?

490. Gegeben ist die Asymptotengleichung einer Hyperbel $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichungen $y = A_1 x$ und $y = A_2 x$ genügen, wenn denselben konjugierte Durchmesser entsprechen sollen?

491. Der eine Durchmesser der Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$ möge mit der einen Asymptote der Kurve zusammenfallen. Welche Lage hat der konjugierte Durchmesser?

492. Es ist zu zeigen, daß die Paare konjugierter Durchmesser der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ ein involutorisches Strahlenbüschel bilden. Welches sind die Doppelstrahlen der Involution?

493. Welche Lage haben zwei konjugierte Durchmesser einer Hyperbel zu der Hauptachse der Kurve? Welcher Satz ergiebt sich für die Punkte, in denen eine Hyperbel von zwei konjugierten Durchmessern geschnitten wird?

494. Gegeben ist die Hyperbel $16y^2 - 25x^2 = - 400$ und der Durchmesser $y = \frac{1}{3}x$. a) Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers? b) Welchen Winkel schließen beide Durchmesser miteinander ein?

495. In der Hyperbel $4y^2 - 49x^2 = - 196$ ist durch den Punkt $x_1 = 5$, $y_1 = 3$ eine Sehne zu ziehen, welche in diesem Punkte halbiert wird. Welches ist die Gleichung der Sehne?

496. Es soll die Länge desjenigen Durchmessers der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ bestimmt werden, der dem Durchmesser $y = Mx$ konjugiert ist.

Beispiel. $4y^2 - 9x^2 = - 36$, $y = 3x$.

497. Von der Hyperbel $16y^2 - 25x^2 = - 400$ sind diejenigen Durchmesser zu bestimmen, welche einen Winkel von 45^0 miteinander einschließen.

498. An eine Hyperbel ist in einem gegebenen Punkte P eine Tangente zu legen. Wie ist die Konstruktion auszuführen?

499. An eine Hyperbel sind Tangenten in gegebener Richtung zu legen.

500. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte der Nebendurchmesser der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$?

501. Wie liegen die Asymptoten zweier konjugierten Hyperbeln zu einander?

502. Gegeben sind die beiden konjugierten Hyperbeln

$$a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2 \quad \text{und} \quad a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2.$$

Von den Brennpunkten der ersten sind nach zwei entsprechenden Punkten der beiden Hyperbeln Leitstrahlen gezogen. Wie verhält sich die Summe der Leitstrahlen des ersten Punktes zur Summe der Leitstrahlen des zweiten?

503. Durch den einen Endpunkt eines Hauptdurchmessers $y = Mx$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = - a^2b^2$ ist eine Tangente der letzteren gezogen. In welchem Verhältnis steht das von den

Asymptoten begrenzte Stück derselben zu der Länge des konjugierten Nebendurchmessers?

504. Durch den Brennpunkt $(e, 0)$ der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ist eine Sehne gezogen, welche gegen die Hauptachse unter dem Winkel φ geneigt ist. In welcher Beziehung steht dieselbe zu dem parallelen Durchmesser und zu der Hauptachse?

505. Von der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel φ gegeben. In welcher Beziehung stehen die gegebenen Stücke zu den Achsen?

506. In welcher Beziehung stehen je zwei konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel?

507. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser $2a_1 = 10$, $2b_1 = 14$ und der von diesen eingeschlossene Winkel $\varphi = 45^0$ gegeben. Wie groß sind die Achsen der Hyperbel?

508. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser der Größe und Lage nach gegeben. Die Asymptoten der Kurve sind durch Konstruktion zu finden.

509. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser der Länge und Lage nach gegeben. Die Hauptachse und die Nebenachse sollen durch Konstruktion gefunden werden.

510. Es mögen die Endpunkte von zwei konjugierten Durchmessern einer Hyperbel miteinander verbunden sein. Welches ist der Inhalt des von diesen Verbindungslinien gebildeten Parallelogramms?

511. An eine Hyperbel sei im Punkte P eine Tangente gelegt, welche die eine Asymptote im Punkte Q schneidet, ferner sei durch Q eine Parallele zu dem durch P gehenden Durchmesser gezogen und bis zum Schnitt mit dem konjugierten Durchmesser verlängert. Welches ist der Inhalt des so entstandenen Parallelogramms?

512. Gegeben ist die Gleichung einer Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$. Welche Gestalt erhält dieselbe, wenn zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ als Koordinatenachsen angenommen werden?

513. Die Gleichung einer Hyperbel ist $a_1{}^2y^2 - b_1{}^2x^2 = -a_1{}^2b_1{}^2$, wenn zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen an-

genommen sind. Welchen Gleichungen entsprechen in diesem Falle die Asymptoten der Hyperbel?

514. In einer gegebenen Hyperbel ist eine Sehne s gezogen. Man verlängere dieselbe nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit den Asymptoten. In welcher Beziehung stehen die beiden Verlängerungen zu einander?

515. Von dem Punkte P einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel ist eine Sekante in die Kurve gezogen. Wie groß ist das Rechteck aus der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitte?

516. Wie lassen sich die unter Nr. 316—319 für die Ellipse gestellten Aufgaben für die Hyperbel lösen? Wie gestalten sich die Resultate für diesen Fall?

Die Hyperbel als geometrischer Ort.

517. Durch den Punkt P $(x_1 = -4,\ y_1 = 7)$ ist ein Strahl gezogen, der die beiden Koordinatenachsen schneidet. Das Stück desselben zwischen den Achsen sei im Punkte Q halbiert. Welche Kurve beschreibt der Punkt Q, wenn der Strahl um P gedreht wird?

518. Gegeben sind zwei Gerade g_1 und g_2. Es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, von dem Parallelen zu diesen Geraden gezogen mit ihnen ein Parallelogramm von konstantem Inhalt bilden.

519. Es soll der geometrische Ort eines Punktes P gefunden werden, dessen Verbindungslinie mit dem Punkte A $(x_1 = 1,\ y_1 = 1)$ durch die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ im Verhältnis $2:1$ geteilt wird.

520. Durch den Punkt P (x_1, y_1) sind Sehnen in die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ gezogen. Auf welcher Kurve liegen die Halbierungspunkte derselben?

521. Die Ordinate CP einer Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sei über P hinaus bis K verlängert, so daß $CK = nCP$ ist. Es sei ferner der Punkt $(a, 0)$ mit P, der Punkt $(-a, 0)$ mit K verbunden und zwar so, daß sich die beiden Geraden in Q schneiden. Welches ist der geometrische Ort des Punktes Q?

522. Die Grundlinie c eines Dreiecks liegt auf dem positiven Teile der Abscissenachse, der eine Endpunkt derselben im Koordinatenanfangspunkte. Welches ist der Ort der gegenüberliegenden

Spitze, wenn das Produkt der Tangenten der Winkel an der Grundlinie $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = -k$ ist?

523. Es soll der geometrische Ort der Spitze eines Dreiecks bestimmt werden, dessen Grundlinie mit dem positiven Teile der X-Achse zusammenfällt und die Endpunkte $(0, 0)$ und $(10, 0)$ besitzt, wenn die Winkel an der Grundlinie der Relation $\operatorname{tg}\alpha = 2\cot\alpha + \cot\beta$ genügen.

524. Die Grundlinie eines Dreiecks hat die Koordinaten $(0, 0)$ und $(c, 0)$. Welches ist der geometrische Ort der gegenüberliegenden Spitze, wenn der eine Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der andere ist?

525. Längs der Parabel $y^2 = px$ gleiten zwei Tangenten fort, welche den konstanten Winkel ϑ einschließen. Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt der Tangenten? Wie gestaltet sich das Resultat a) für $\vartheta = 45^0$, b) für $\vartheta = 90^0$?

526. Längs der Parabel $y^2 = px$ gleiten zwei Tangenten fort. Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt derselben, wenn die Differenz der Tangenten ihrer Neigungswinkel zur X-Achse gleich der Größe k ist?

527. Die Seite $AB = c$ des Dreiecks ABC fällt mit dem positiven Teile der X-Achse, der Punkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Welches ist der geometrische Ort des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises, wenn die Seite a und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke des Dreiecks veränderlich sind?

528. Von einem Dreieck ABC ist die Seite c und die Differenz der beiden andern Seiten $a - b = d$ konstant. Welches ist der geometrische Ort des Schwerpunktes?

529. Die Seite c des Dreiecks ABC fällt mit dem positiven Teile der Abscissenachse, der eine Endpunkt derselben mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Die Spitze C gleitet auf der Parabel $\eta + n\xi^2 - m\xi = 0$ fort. Welche Kurve beschreibt der Höhenpunkt des Dreiecks? Welche Gestalt nimmt das Resultat an, wenn der Scheitel der Leitparabel in den Koordinatenanfangspunkt verlegt wird?

530. Über der Hauptachse der Hyperbel $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - 2a\xi)$ als Grundlinie ist ein Dreieck konstruiert, dessen Spitze auf der

Hyperbel fortrückt. Welches ist der geometrische Ort des Höhenpunktes?

531. Über der Hauptachse der Hyperbel $\eta^2 = \frac{b^2}{a^2}(\xi^2 - 2a\xi)$ als Grundlinie ist ein Dreieck konstruiert, dessen Spitze auf der Hyperbel fortgleitet. Auf welcher Linie bewegt sich gleichzeitig der Schwerpunkt des Dreiecks fort?

532. Die Seite AB des Rechtecks $ABCD$ liege fest auf der X-Achse. Auf der Diagonale DB sei in B ein Lot errichtet, welches die Verlängerung der Diagonale AC in P schneiden möge. Welches ist der Weg, den P durchläuft, wenn CD so fortgeschoben wird, daß es der ursprünglichen Lage parallel bleibt?

533. Gegeben ist ein Kreis K und ein Punkt P außerhalb desselben. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch den Punkt P gehen und den Kreis K einschließend oder ausschließend berühren?

534. Gegeben sind zwei Kreise $x^2 + y^2 = r_1^2$ und $(x - a)^2 + y^2 = r_2^2$, welche vollständig getrennt liegen. 1. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises gesucht werden, der die gegebenen Kreise entweder beide ausschließend oder beide einschließend berührt. 2. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes desjenigen Kreises gesucht werden, der den einen der gegebenen Kreise einschließend, den andern ausschließend berührt. Wie gestaltet sich im ersten Falle das Resultat, wenn die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich sind?

535. Gegeben ist der Kreis $y^2 = 2rx - x^2$, welcher von der X-Achse in dem Durchmesser AB geschnitten wird. Durch den Koordinatenanfangspunkt A ist eine Sehne AC gezogen, welche eine zu AB parallele Tangente des Kreises in K schneidet. Das von K auf die X-Achse gefällte Lot trifft eine durch den Mittelpunkt zu AC gezogene Parallele in P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn AC um A gedreht wird? Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, da die Gleichung der Tangente entweder $y = +r$ oder $y = -r$ sein kann.

536. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$. Durch die Punkte $(+r, 0)$ und $(-r, 0)$ sind zwei Sehnen in den Kreis gezogen, so daß die Verbindungslinie der Endpunkte derselben lotrecht zur

X-Achse steht. Die Verlängerungen der Sehnen schneiden sich im Punkte P. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

537. Die im Punkte $P(x_1, y_1)$ der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ konstruierte Normale schneide die große Achse in M, die kleine in M_1. Man verbinde den Mittelpunkt der Ellipse O mit dem Punkte S, in dem sich die durch M und M_1 zu den Achsen gezogenen Parallelen schneiden. Durch den Punkt $(a, 0)$ sei endlich eine Parallele zur Tangente im Punkte P gezogen, welche OS im Punkte Q treffen möge. Welches ist der geometrische Ort des Punktes Q?

538. Die Tangenten des Kreises $y^2 + x^2 = r^2$ mögen als Polaren bezüglich der Parabel $y^2 = px$ betrachtet werden. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf der die zugehörigen Pole liegen?

539. Ein Büschel von Parabeln entspricht der Gleichung

$$y^2 - px - k^2 = 0,$$

in der p ein variabeler Parameter, dagegen k eine Konstante ist. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare der Parabeln des Büschels betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

540. Gegeben sind zwei Kreise

$$(x - a)^2 + y^2 = r_1^2 \text{ und } x^2 + y^2 = r_2^2.$$

Von dem Punkte P sind Tangenten an diese Kreise gezogen. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, wenn die Differenz der Tangenten gleich d sein soll? $(a > d.)$

541. Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ und die Gerade $x = a$. Auf jedem Radius ist der dem Schnittpunkte mit dem Kreise zugeordnete harmonische Punkt zu bestimmen, wenn die beiden andern zugeordneten Punkte der Mittelpunkt und der Schnittpunkt des Radius und der Geraden sind. Auf welcher Kurve liegen die vierten harmonischen Punkte?

Konstruktionsaufgaben.

542. Gegeben sind die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 und ein Punkt P einer Hyperbel. Die Scheitel der Kurve sind durch Konstruktion zu finden.

543. Von einer Hyperbel sind die beiden Scheitelpunkte A_1 und A_2 und der Punkt C der einen Direktrix gegeben. Die Brennpunkte sind zu bestimmen.

544. Die Lage der beiden Brennpunkte F_1 und F_2 und die Lage einer Tangente t sind bekannt. Es sollen die Achsen der Hyperbel gefunden werden.

545. Von einer Hyperbel kennt man die Richtung der Hauptachse, sowie den Brennpunkt F_1 und die Tangente t mit ihrem Berührungspunkte P. Der zweite Brennpunkt, die Scheitel und die Asymptoten sind zu bestimmen.

546. Bekannt ist die Lage eines Brennpunktes F_1, die Lage einer Asymptote a_1 und die Größe der Hauptachse $2a$. Man soll die Lage des zweiten Brennpunktes, die Lage der Scheitel und die Richtung der zweiten Asymptote finden.

547. Von einer Hyperbel ist eine Asymptote, ein Brennpunkt und eine Tangente gegeben. Gesucht ist der andere Brennpunkt, die Scheitel und die andere Asymptote.

548. Von einer Hyperbel ist eine Asymptote, ein Brennpunkt und ein Punkt der Kurve gegeben. Gesucht ist die Tangente in dem letzteren.

549. Man kennt den Winkel der beiden Asymptoten und den Abstand der beiden Brennpunkte einer Hyperbel. Wo liegen die Scheitel der Kurve?

550. Von einer Hyperbel kennt man die Lage eines Brennpunktes F_1 und die Lagen der drei Tangenten t_1, t_2, t_3. Man soll die Lage des zweiten Brennpunktes sowie die Lagen und Längen der Achsen finden.

551. Von einer gegebenen Hyperbel sollen die Achsen, die Scheitel, die Brennpunkte und die Asymptoten gefunden werden.

552. Gegeben sind die Richtungen der beiden Asymptoten einer Hyperbel sowie die Größe der Hauptachse. Die Lage der beiden Brennpunkte sowie die Länge der imaginären Achse sind zu finden.

553. Es sollen die Brennpunkte einer Hyperbel gefunden werden, wenn die Hauptachse der Lage und Größe nach sowie ein Punkt P der Hyperbel gegeben sind.

554. Gegeben ist die Hauptachse $2a$ der Lage und Größe nach sowie die Lage einer Tangente t. Zu bestimmen sind die Brennpunkte und die Asymptoten.

555. Von einer Hyperbel sind die beiden Asymptoten und ein Punkt P der Kurve gegeben. Wie findet man die Brennpunkte und die Scheitel?

556. Es soll eine Hyperbel konstruiert werden, von der die beiden Asymptoten a_1 und a_2 sowie die Tangente t gegeben sind.

557. Von einer Hyperbel sind die beiden Asymptoten a_1 und a_2 und ein Durchmesser d_1 gegeben. Wie findet man die Richtung desjenigen Durchmessers, der d_1 konjugiert ist?

558. Bekannt ist der Asymptotenwinkel und die Differenz der Achsen einer Hyperbel. Wie lassen sich die Scheitelpunkte und die Brennpunkte finden?

559. Gegeben ist die Lage einer Asymptote a_1, die Richtung einer Tangente t_1, der Berührungspunkt derselben P_1 und endlich ein zweiter Punkt P_2 der Hyperbel. Wie läßt sich die Kurve konstruieren?

560. Von einer Hyperbel kennt man die Lage des Mittelpunktes O, die Richtung einer Asymptote, die Lage einer Tangente und das Verhältnis der Achsen. Die Kurve ist zu konstruieren.

561. Zur Konstruktion einer Hyperbel sind zwei Punkte derselben P_1 und P_2, der Mittelpunkt O und die Lage einer Asymptote a_1 gegeben.

562. Man kennt von einer Hyperbel die Lage der einen Asymptote a_1, sowie die drei Punkte der Kurve P_1, P_2, P_3. Wie läßt sich die Konstruktion der Hyperbel ausführen?

563. Gegeben sind die beiden Scheiteltangenten t_1 und t_2, der Berührungspunkt der letzteren S und eine dritte Tangente t_3. Wie findet man die Brennpunkte der Hyperbel?

Flächeninhalt der Hyperbel.

564. Gegeben ist die gleichseitige Hyperbel $xy = a^2$ und auf derselben die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Wie groß ist der Inhalt desjenigen Flächenstückes, welches von der Abscissenachse, den beiden Ordinaten y_1, y_2 und dem zwischen beiden liegenden Bogen der Hyperbel begrenzt wird?

Beispiel. $xy = 9$; $x_1 = 4$, $x_2 = 25$.

565. Die Asymptotengleichung einer Hyperbel ist $xy = \frac{a^2 + b^2}{4}$. Auf der Kurve liegen die Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. Es soll

der Inhalt des Flächenstückes berechnet werden, welches von der X-Achse, den beiden Ordinaten y_1 und y_2 und dem zwischen diesen beiden liegenden Bogen begrenzt wird.

Beispiel. $xy = 61$, $\alpha = 120^0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 17$.

566. Gegeben sind auf einer Hyperbel die beiden Punkte P_1 und P_2, welche durch die beiden Geraden OP_1 und OP_2 mit dem Mittelpunkte verbunden sind. Wie groß ist der Inhalt des Sektors, welcher von diesen beiden Strahlen und dem Bogen P_1P_2 begrenzt wird?

567. Eine Hyperbel wird durch zwei parallele Gerade in den Punkten P_1, P_2 und Q_1, Q_2 geschnitten. In welcher Beziehung stehen die beiden Sektoren OP_1Q_1 und OP_2Q_2?

568. Die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ wird durch die Gerade $x = d$ in den Punkten P_1 und P_2 geschnitten. Man verbindet P_1 und P_2 mit dem Koordinatenanfangspunkte O. Wie groß ist der Inhalt des Sektors OP_1P_2?

Beispiel. $25y^2 - 9x^2 = -225$, $x = 13$.

569. Durch die Gerade $x = d$ wird von der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ ein Segment abgeschnitten. Wie groß ist der Inhalt desselben?

Beispiel. $7x^2 - 3y^2 = 148$, $x = 5$.

570. Die Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ wird von den beiden Geraden $y = +f$ und $y = -f$ geschnitten. Wie groß ist der Inhalt der Figur, welche von diesen beiden Geraden und den dazwischen liegenden Bogen der Hyperbel begrenzt wird?

571. An den Hauptkreis der Hyperbel $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ sind zwei Tangenten gelegt, welche der Hauptachse parallel laufen. Wie groß sind die vier Flächenstücke, von denen jedes durch einen Quadranten des Kreises, einen Bogen der Hyperbel und eine Tangente begrenzt wird?

Die Kurven zweiten Grades.

Die allgemeine Gleichung zweiten Grades.

572. Gegeben ist die Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

welche nach y entwickelt die Gestalt

$$y = \frac{-Bx - E}{C} \pm \frac{1}{C}\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF}$$

annimmt. Es möge die Diskriminante der Form unter dem Wurzelzeichen

$$(BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) \text{ oder}$$

$$-C\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

kurz mit Δ bezeichnet werden. Welche Kurve entspricht der gegebenen Gleichung, wenn

$$1. \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0 \text{ und}$$

$$\alpha)\ -\frac{\Delta}{C} \gtrless 0 \text{ und } A \text{ oder } C \gtrless 0,\quad \beta)\ -\frac{\Delta}{C} = 0,\quad \gamma)\ -\frac{\Delta}{C} \gtrless 0 \text{ und } A \text{ oder } C \lessgtr 0;$$

wenn

$$2. \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0 \text{ und}$$

$$\alpha)\ -\frac{\Delta}{C} > 0,\quad \beta)\ -\frac{\Delta}{C} = 0,\quad \gamma)\ -\frac{\Delta}{C} < 0;$$

wenn endlich

$$3. \quad \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0 \text{ und}$$

$$\alpha)\ -\frac{\Delta}{C} > 0,\quad \beta)\ -\frac{\Delta}{C} = 0,\quad \gamma)\ -\frac{\Delta}{C} < 0 \text{ ist?}$$

573. Es sollen die Kurven bestimmt werden, welche den folgenden Gleichungen entsprechen:

a) $3x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 5 = 0;$

b) $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0;$

c) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x - 13y + 10 = 0;$

d) $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0;$

e) $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 24x + 16y - 9 = 0;$

f) $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0;$

g) $25x^2 + 40xy + 16y^2 + 70x + 56y + 49 = 0;$

h) $13x^2 + 14xy + 5y^2 + 14x + 10y + 5 = 0;$

i) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0;$

k) $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0;$

l) $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0;$

m) $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0;$

n) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 85 = 0;$

o) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0.$

574. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Es sollen die geometrischen Örter der Halbierungspunkte derjenigen Sehnen bestimmt werden, welche a) der Y-Achse, b) der X-Achse parallel laufen.

Beispiele. 1. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0;$

2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0.$

575. Welches sind in dem Kegelschnitt von Nr. 574 die Gleichungen der Tangenten, welche den Koordinatenachsen parallel laufen?

576. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Gleichung zweiten Grades eine Parabel entspricht?

Beispiel. $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0.$

577. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Es sollen die Koordinaten des Mittelpunktes derjenigen Kurve bestimmt werden, welche der Gleichung entspricht.

Beispiele. 1. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0;$

2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0;$

3. $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0.$

578. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die Kurve, welche der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

entspricht, durch den Koordinatenanfangspunkt gehen soll?

579. Es sollen die Bedingungen bestimmt werden, welchen die Konstanten der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

genügen müssen, wenn die entsprechende Kurve von einer der Koordinatenachsen berührt werden soll.

580. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Durch den Punkt (a, b) sind Parallelen zu den Koordinatenachsen gezogen. Welche Gestalt nimmt die gegebene Gleichung an, wenn man diese letzteren Geraden als Koordinatenachsen betrachtet?

581. Durch den Mittelpunkt der Linie zweiten Grades, welche der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

entspricht, sind Parallelen zu den Achsen gezogen. Welche Form nimmt die Gleichung an, wenn die letzteren als Koordinatenachsen betrachtet werden?

Beispiele. 1. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0;$
2. $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0;$
3. $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0.$

582. Welche Gestalt würde das Resultat der vorhergehenden Aufgabe annehmen, wenn der gegebenen Gleichung eine Parabel entspräche?

583. Gegeben ist die Mittelpunktsgleichung einer Kurve zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + K = 0.$$

Es soll das Koordinatensystem so gedreht werden, daß der Koeffizient des Produktes der Variabeln verschwindet. Wie groß ist der Drehungswinkel? Welche Gestalt nimmt die Gleichung an? Wie verhält sich die Konstante K bei der Drehung?

Beispiele. 1. $10x^2 - 6xy + 7y^2 = 30;$
2. $9x^2 + 16xy - 20y^2 = 60.$

584. Der Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

möge eine Parabel entsprechen. Das rechtwinklige Koordinatensystem soll so gedreht werden, daß die X-Achse der Achse der Parabel parallel läuft. Wie groß ist der Drehungswinkel? Welche Gestalt nimmt die Gleichung an?

Beispiel. $9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0$.

585. Wie groß sind die Achsen der Linie zweiten Grades, welche der Gleichung

$$3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0$$

entspricht?

586. Es sollen die Achsen der Kurve bestimmt werden, deren Gleichung

$$4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$$

ist.

587. Gegeben ist die Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Es soll die lineare Excentricität der Kurve gesucht werden, welche dieser Gleichung entspricht.

Beispiel. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$.

588. Wie groß ist der Parameter der Parabel

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 6x + 10y + 3 = 0?$$

589. Durch den Koordinatenanfangspunkt seien zwei neue Achsen gelegt, von denen die Abscissenachse unter dem Winkel α, die Ordinatenachse unter dem Winkel β gegen die ursprüngliche X-Achse geneigt sein möge. Wie lautet die Gleichung einer Linie zweiten Grades, wenn dieselbe auf dieses neue Achsensystem bezogen wird?

590. Durch wieviele Punkte ist die Lage einer Linie zweiten Grades bestimmt? Wie lautet die Gleichung dieser Linie, wenn die nötige Anzahl von Punkten gegeben ist?

591. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn drei von den gegebenen Punkten, z. B. die drei letzten, in einer geraden Linie liegen?

592. Durch wieviele Punkte ist die Lage einer Parabel vollständig bestimmt?

593. Ein Punkt geht von dem Koordinatenanfangspunkte aus und durchläuft eine Linie zweiten Grades. Dabei gelangt er zu den Punkten $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = 18$, $y_2 = 6$; $x_3 = 32$, $y_3 = 8$; $x_4 = 72$, $y_4 = 12$. Welches ist die Gleichung der Kurve?

594. Welche Linie zweiten Grades läßt sich durch die Punkte $x_1 = 3$, $y_1 = 7$; $x_2 = -2$, $y_2 = -8$; $x_3 = 11$, $y_3 = 31$; $x_4 = 9$, $y_4 = -2$; $x_5 = 17$, $y_5 = 1$ legen?

595. Gegeben sind fünf Punkte:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 2;\ \ x_2 = 0,\ y_2 = 1;\ \ x_3 = \tfrac{1}{4},\ y_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{4};$$

$$x_4 = \tfrac{1}{2},\ y_4 = 2;\ \ x_5 = \tfrac{7}{8},\ y_5 = \frac{15-\sqrt{7}}{8}.$$

Es soll die Linie zweiten Grades bestimmt werden, welche durch diese Punkte hindurchgeht.

596. Man soll die Linie zweiten Grades bestimmen, auf welcher die fünf Punkte

$$x_1 = -8,\ y_1 = 0;\ \ x_2 = 3,\ y_2 = \sqrt{\tfrac{11}{12}};\ \ x_3 = 4,\ y_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$x_4 = 1,\ y_4 = -\tfrac{1}{2};\ \ x_5 = 6,\ y_5 = \sqrt{\tfrac{7}{3}}$$

liegen.

597. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche die X-Achse in dem Punkte $(4, 0)$, die Y-Achse in dem Punkte $(0, 3)$ berührt.

598. Wie heißt die Gleichung einer Parabel, welche die positiven Teile der Koordinatenachsen berührt und durch die Punkte

$$x_1 = \frac{28+8\sqrt{6}}{3},\ y_1 = 1;\ \ x_2 = 1,\ y_2 = \frac{27-12\sqrt{2}}{4}$$

geht?

599. Es soll eine Linie zweiten Grades gefunden werden, welche von den beiden Koordinatenachsen berührt wird und zwar von der Y-Achse im Punkte $(0, 4)$, außerdem aber durch die beiden Punkte

$$x_1 = \tfrac{16}{3},\quad y_1 = -\tfrac{20}{3};$$

$$x_2 = -3,\ y_2 = 10 + \tfrac{5}{2}\sqrt{15}$$

geht.

Geometrische Örter.

600. Zwischen den Schenkeln eines Winkels α bewegt sich eine Linie von konstanter Länge q. Welche Kurve beschreibt ein Punkt P derselben?

601. Die konstante Grundlinie c eines Dreiecks liegt fest, ebenso der Punkt Q, in welchem dieselbe von dem anbeschriebenen Kreise berührt wird. Welches ist der geometrische Ort der gegenüberliegenden Spitze C?

602. Auf der Y-Achse liegt der Punkt $P(0, y_1)$. Durch ihn ist ein Strahl gezogen, welcher die X-Achse und die Gerade g ($y = Mx$) schneidet. Welches ist der geometrische Ort des Halbierungspunktes desjenigen Abschnittes, der zwischen der Geraden g und der X-Achse liegt?

603. Gegeben ist die Gerade g, welche der Gleichung $y = x$ entspricht. Auf welcher Kurve liegt der Punkt P, wenn die Summe der Quadrate seiner Abstände von der Geraden g und der Y-Achse gleich k^2 sein soll?

604. Gegeben sind zwei sich schneidende Gerade $y = Mx$ und $y = 0$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, für den die Differenz der Quadrate der Entfernungen von den beiden Geraden gleich d^2 ist?

605. Gegeben sind zwei sich schneidende Gerade $y = Mx$ und $y = 0$. Von einem Punkte P sind auf beide Gerade Lote gefällt, so daß das Rechteck aus denselben gleich q^2 ist. Welches ist der geometrische Ort des Punktes P?

606. Von einem Dreieck liegt die Grundlinie c fest und die Differenz der Winkel an derselben hat einen konstanten Wert. Welches ist der geometrische Ort der Spitze dieses Dreiecks?

607. Die Seite AB des Dreiecks ABC falle mit dem positiven Teile der X-Achse, der Eckpunkt A mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Auf welcher Linie bewegt sich der Schwerpunkt des Dreiecks, wenn die Seite a und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind?

608. In einem Dreieck ABC sei die Seite b und der Winkel B konstant, die übrigen Stücke veränderlich. Welches ist der geometrische Ort des fünften merkwürdigen Punktes? Welche Gestalt nimmt das Resultat an, wenn der Winkel B gleich 90^0 ist? Die Lage des Dreiecks sei dieselbe wie in Aufgabe 607.

609. Gegeben ist das Dreieck ABC. Welches ist der geometrische Ort des fünften merkwürdigen Punktes, wenn die Seite b und der Winkel A konstant, die übrigen Stücke veränderlich sind? Über die Lage des Dreiecks siehe Aufgabe 607.

610. Welche Linie beschreibt der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, wenn die Grundlinie c konstant ist und die in Aufgabe 607 angegebene Lage hat, die gegenüberliegende Spitze C aber auf der Geraden $y = Mx + n$ fortrückt?

611. Jede Abscisse des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ sei um das n-fache der zugehörigen Ordinate vergrößert. Welches ist der geometrische Ort der Endpunkte der Ordinaten?

612. Gegeben ist die Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Auf welcher Linie liegen die Halbierungspunkte aller derjenigen Sehnen, welche durch den Punkt (x_1, y_1) gehen?

613. Gegeben ist ein Kreis, dessen Gleichung $y^2 = 2rx - x^2$ ist. Der Durchmesser AG desselben läuft der Y-Achse parallel. Durch A ist ein Strahl S gezogen, welcher die Peripherie in H, die Y-Achse in D schneidet. Verbindet man den Mittelpunkt M des Kreises mit D, zieht man ferner die Gerade HG, so schneiden sich diese Linien in P. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn der Strahl S um A gedreht wird?

614. Gegeben ist der Punkt $A\ (0, y_1)$ und der Punkt $D\ (x_2, y_2)$. Ein Strahl durch A gezogen schneidet die X-Achse in B. Man verbindet B mit D und errichtet auf dieser Verbindungslinie in D ein Lot, welches den Strahl AB in P trifft. Welche Linie beschreibt der Punkt P, wenn der Strahl AB um A gedreht wird?

Beispiel. $y_1 = 5$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$.

615. Gegeben sind drei Punkte $A\,(0, y_1)$, $B\,(x_2, 0)$, $C\,(x_3, y_3)$ und die Gerade g, deren Gleichung $x - a = 0$ ist. Durch A sei ein Strahl S gezogen, der die X-Achse in K, die Gerade g in F schneiden möge, ferner sei B mit F und C mit K verbunden. Welche Linie beschreibt der Schnittpunkt P dieser beiden Verbindungslinien, wenn der Strahl S um A gedreht wird?

Beispiel. $y_1 = 4$; $x_2 = 3$; $x_3 = 8$, $y_3 = 5$;
$a = 5$.

616. Gegeben sind die Geraden

$$(G)\ \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1, \quad (G_1)\ y - 2x + 10 = 0.$$

Durch den festen Punkt A (8, 6) der letzteren Geraden geht ein Strahl, der G in C schneidet. Zieht man durch C eine Parallele zur X-Achse, die G_1 in D trifft, und verbindet D mit dem Punkte

(0, 3), so schneidet diese letztere Linie den durch A gehenden Strahl in P. Welches ist der geometrische Ort von P, wenn der Strahl um A gedreht wird?

617. Auf der Geraden $y = b$ liegt der feste Punkt $K(a, b)$. K sei mit dem Koordinatenanfangspunkte verbunden, und eine Parallele zu dieser Verbindungslinie schneide die Y-Achse in F, die Gerade $(y = b)$ in L. Man verbinde den Punkt $M(-a, 0)$ mit L, ferner den Punkt $N(a, 0)$ mit F, und bezeichne den Schnittpunkt dieser Verbindungslinien mit P. Es soll der geometrische Ort des Punktes P gesucht werden.

618. Gegeben ist der Kreis $y^2 + x^2 = r^2$ und die Tangente $y = r$ desselben. Von zwei Punkten der letzteren, welche um die Strecke a voneinander entfernt sind, sind zwei Tangenten an den Kreis gelegt. Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten ist P. Es soll der geometrische Ort des Punktes P gefunden werden.

Die Kurven zweiten Grades und die gerade Linie; Enveloppen.

619. Gegeben sind eine Kurve zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

und eine Gerade $y = Mx + n$. Wann werden die Schnittpunkte dieser beiden Gebilde getrennt und reell sein? Wann fallen sie zusammen? Wann sind sie imaginär? Welcher Ordnung gehört die Kurve zweiten Grades an?

620. In welchen Punkten wird die Linie zweiter Ordnung

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

von der Geraden $y + 2x + 3 = 0$ geschnitten?

621. Es sollen die Punkte bestimmt werden, in denen die Linie zweiter Ordnung

$$9x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 3y + 10 = 0$$

von der Geraden $y + 2x + 2 = 0$ geschnitten wird.

622. Gegeben sind zwei Geradenpaare $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ und $L'_1 = 0$, $L'_2 = 0$. Durch die Punkte, in welchen das erste Paar von dem zweiten geschnitten wird, ist eine Linie zweiter Ordnung zu legen. Welches ist die Gleichung derselben?

623. Die Koordinatenachsen werden von den beiden Geraden

$$\frac{x}{p_1} + \frac{y}{q_1} = 1, \quad \frac{x}{p_2} + \frac{y}{q_2} = 1$$

in vier Punkten geschnitten. Es soll die Gleichung eines Kegelschnitts bestimmt werden, der durch die Punkte hindurch geht. Für welchen Wert des Parameters k ist der Kegelschnitt eine Parabel?

624. Die beiden Geraden

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$$

werden von den Geraden

$$y = 2x - 5, \quad y = x + 6$$

in vier Punkten geschnitten. Es ist durch die Schnittpunkte ein Kegelschnitt zu legen, welcher zugleich durch den Koordinatenanfangspunkt geht. Welches ist die Gleichung der Kurve?

625. Die beiden Geraden

$$2y - x = 0, \quad y - 2x = 0$$

werden von dem Geradenpaare

$$x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0$$

geschnitten. Es soll die Gleichung des Kegelschnittes bestimmt werden, der durch die vier Schnittpunkte und durch den Punkt $x_1 = 6$, $y_1 = 1$ geht.

626. Die beiden Geraden

$$3y - x = 0, \quad 2y - 3x = 0$$

werden von dem Geradenpaare

$$x + y - 1 = 0, \quad 2x + 3y - 6 = 0$$

in vier Punkten geschnitten. Es soll durch die Schnittpunkte ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher von der X-Achse berührt wird.

627. Durch die Punkte, in welchen das Geradenpaar

$$2y - x = 0, \quad y - 2x = 0$$

von den beiden Geraden

$$x + 2y - 2 = 0, \quad 2x + 5y - 6 = 0$$

geschnitten wird, ist ein Kegelschnitt zu legen, dessen Mittelpunkt sich auf der Y-Achse befindet. Welches ist die Gleichung desselben?

628. Von einem Punkte P sind zwei Sekanten in einen Kegelschnitt gezogen. Wie verhalten sich die Rechtecke, von denen

jedes aus den Abschnitten einer Sekante gebildet wird? Welches Resultat ergiebt sich, wenn die Sekanten so verschoben werden, daß sie ihren ursprünglichen Richtungen parallel bleiben?

629. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die Linie zweiter Ordnung eine Parabel ist und die eine Sekante der Achse der Parabel parallel läuft?

630. Gegeben ist die Gleichung einer Linie zweiter Ordnung in Punktkoordinaten

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Welches ist die Gleichung dieser Kurve in Linienkoordinaten?

631. Gegeben ist eine Gleichung zweiten Grades

$$A_1u^2 + 2B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0,$$

in der u und v Linienkoordinaten sind. Wann entspricht dieser Gleichung eine Ellipse, wann eine Parabel, wann eine Hyperbel?

632. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn der Gleichung

$$A_1u^2 + 2B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0$$

zwei Punkte entsprechen sollen?

633. Unter welchen Bedingungen entspricht der Gleichung

$$A_1u^2 + 2B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0$$

ein einziger Punkt?

634. Welches Gebilde entspricht der Gleichung

$$21u^2 + 17uv + 2v^2 + 10u + 3v + 1 = 0?$$

635. Bestimme das Gebilde, dessen Gleichung

$$25u^2 + 30uv + 9v^2 + 10u + 6v + 1 = 0$$

ist.

636. Die Seiten eines Dreiecks entsprechen den Gleichungen

$$y = 0, \quad y - x = 0, \quad 2y + x - 10 = 0.$$

Von einem Punkte P der Grundlinie $y = 0$ sind Lote auf die beiden andern Seiten gefällt, und die Fußpunkte der Lote durch eine Gerade verbunden. Welches ist die Enveloppe der Verbindungslinien, welche man erhält, wenn der Punkt P längs der Grundlinie fortrückt?

637. Von den Punkten $(a, 0)$ und $(0, a)$ seien auf die Gerade $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ Lote gefällt. Welche Kurve hüllt

die verschiedenen Lagen der Geraden ein, wenn das aus den Loten gebildete Rechteck den konstanten Inhalt k^2 besitzt?

638. Gegeben sind die beiden Geraden $2y - x = 0$, $y - 3x = 0$ und der Punkt P, dessen Koordinaten $x_1 = 10$, $y_1 = 10$ sind. Im Punkte P liegt der Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel die gegebenen Geraden in den Punkten Q und R schneiden, so daß PQR ein rechtwinkliges Dreieck ist. Welche Kurve hüllt die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke ein, die man erhält, wenn der rechte Winkel um P gedreht wird?

639. Gegeben ist ein Kreisbüschel, welches der Gleichung

$$y^2 + x^2 - 2kx - \delta^2 = 0$$

entspricht. Durch den Punkt $(0, \delta)$ ist die Sekante $y + x - \delta = 0$ gezogen, und in den Punkten, wo dieselbe die Kreise schneidet, sind Tangenten an die letzteren gelegt. Welche Kurve hüllt diese Tangenten ein?

640. Von dem Punkte $P(k, 0)$ sind Sekanten in den Kreis $y^2 + x^2 = r^2$ gezogen, und auf jeder dieser Sekanten in den Punkten, in welchen sie von dem Kreise geschnitten werden, Lote errichtet. Von welcher Kurve werden diese Lote eingehüllt? Wie gestaltet sich das Resultat, wenn $k \gtreqless r$ gesetzt wird?

641. Gegeben ist ein System konfokaler Kegelschnitte, welches der Gleichung $a^2y^2 + (a^2 - e^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - e^2)$ entspricht, und der Punkt $P\,(x_1, y_1)$. Welche Kurve hüllt die Polaren des Punktes P bezüglich der Kurven des Systems ein?

642. Ein System konfokaler Kegelschnitte, welches der Gleichung $a^2y^2 + (a^2 - 4)\,x^2 = a^2\,(a^2 - 4)$ entspricht, wird von der Geraden $y = x - 2$ geschnitten. An jede Kurve seien in den Schnittpunkten Tangenten gelegt. Es soll die Kurve bestimmt werden, welche diese Tangenten einhüllt.

643. Durch den Koordinatenanfangspunkt sind Gerade zu ziehen, welche den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

in unendlich fernen Punkten schneiden. Welches sind die Gleichungen derselben?

644. Welches Resultat ergiebt sich nach der Lösung der vorhergehenden Aufgabe für die unendlich fernen Punkte der einzelnen Kegelschnitte?

645. In welchem Verhältnis wird die Verbindungslinie der beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ durch den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

geteilt?

Tangenten und Asymptoten der Kurven zweiten Grades.

646. Gegeben ist der Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

und auf demselben der Punkt $P(x_1, y_1)$. Welches ist die Gleichung der Tangente des Kegelschnittes in diesem Punkte?

Beispiel. $4x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$; $x_1 = 2$, $y_1 = -3$.

647. An einen gegebenen Kegelschnitt ist im Punkte P desselben eine Tangente zu legen. Wie läßt sich die Konstruktion ausführen?

648. Wieviele Tangenten lassen sich von einem Punkte $P(x_1, y_1)$ an einen Kegelschnitt legen, dessen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ist? Welcher Klasse gehören demnach die Kegelschnitte an?

649. Es sollen die Gleichungen der Tangenten bestimmt werden, welche sich von dem Koordinatenanfangspunkte an den Kegelschnitt

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$$

ziehen lassen.

650. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die sich von dem Punkte $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ an den Kegelschnitt

$$10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$$

ziehen lassen?

651. Es soll der Winkel bestimmt werden, den die vom Koordinatenanfangspunkte an den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

gelegten Tangenten miteinander einschließen.

652. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes gefunden werden, der von den Geraden

$$L_1x + M_1y + N_1 = 0, \quad L_2x + M_2y + N_2 = 0,$$
$$L_3x + M_3y + N_3 = 0, \quad L_4x + M_4y + N_4 = 0, \quad L_5x + M_5y + N_5 = 0$$

berührt wird.

653. Es soll der Kegelschnitt bestimmt werden, der von den Geraden
$x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0,\ 2x - y + 4 = 0,\ x - 2y + 6 = 0$
berührt wird.

654. Welches sind die Gleichungen der Asymptoten eines Kegelschnittes, dessen Gleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ist?

Beispiele. 1. $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$;
2. $3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0$.

655. Es sollen die Koordinaten des Schnittpunktes der Asymptoten eines Kegelschnittes bestimmt werden.

656. Wie groß ist der Winkel, den die Asymptoten eines Kegelschnittes einschließen?

Beispiel. $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$.

657. Es sollen die Gleichungen der Geraden gefunden werden, welche die Asymptotenwinkel des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

halbieren.

Beispiel. $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$.

Pole und Polaren, Durchmesser.

658. Wie heißt die Gleichung der Polare des Punktes $P(x_1, y_1)$ bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0?$$

Welche Form nimmt die Gleichung an, wenn der Pol mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammenfällt? Wo liegt die Polare, wenn der Pol der Mittelpunkt des Kegelschnittes ist?

Beispiel. $10xy - 2y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$; $x_1 = -5$, $y_1 = 7$.

659. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles?

Beispiel. $4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$; $5x - y + 4 = 0$.

660. Wo liegt der Pol, wenn die Polare bezüglich des Kegelschnittes durch den Mittelpunkt des letzteren geht?

661. Die Punkte der Geraden $Lx + My + N = 0$ mögen als Pole des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

betrachtet werden. Welche Lagen haben die zugehörigen Polaren?

662. Die Strahlen eines Büschels mögen als Polaren eines Kegelschnittes betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

663. Von dem Punkte P (x_1, y_1) sind Sekanten in den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

gezogen. Auf jeder Sekante ist der Punkt Q zu bestimmen, welcher mit P die Strecke zwischen den Schnittpunkten des Kegelschnittes und der Sekante harmonisch teilt. Welches ist der geometrische Ort des Punktes Q?

664. Auf einer Geraden g liegen vier harmonische Punkte. Es ist zu zeigen, daß die Polaren dieser Punkte bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + C + y^2 2Dx + 2Ey + F = 0$$

ein harmonisches Büschel bilden.

665. Gegeben sind der Punkt P und der Kegelschnitt K. Es soll die Polare des Punktes P bezüglich des Kegelschnittes K durch Konstruktion gefunden werden.

666. Gegeben sind die Gerade g und der Kegelschnitt K. Es soll der der Geraden g zugehörige Pol bezüglich des Kegelschnittes durch Konstruktion gefunden werden.

667. Von einem Punkte P sollen an einen Kegelschnitt K die beiden Tangenten gelegt werden.

668. Gegeben ist ein Kegelschnitt K, ferner vier Punkte desselben P_1, P_2, P_3, P_4 und eine Tangente t. Wie lassen sich mit Hilfe der gegebenen Stücke Tangenten an den Kegelschnitt legen?

669. Gegeben sind drei Gerade $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$. Es soll die Gleichung eines Kegelschnitts bestimmt werden, der von den beiden ersten Geraden berührt wird, und zwar in den Punkten, in welchen dieselben von der dritten Geraden geschnitten werden.

670. Es soll die Gleichung einer Parabel gefunden werden, welche von den Geraden $3y - x - 12 = 0$ und $2y + x + 6 = 0$

berührt wird, und zwar so, daß die Gerade $5x + 3y - 15 = 0$ Polare des Schnittpunktes jener Tangenten ist.

671. Welches ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch den Koordinatenanfangspunkt geht, ferner die beiden Geraden $y - x - 3 = 0$, $y - 2x + 2 = 0$ zu Tangenten und die Gerade $y + x - 1 = 0$ zur Berührungssehne derselben hat?

672. Gegeben sind drei Gerade

$$L_1 \equiv y - x - 3 = 0, \quad L_2 \equiv 2y + x + 2 = 0,$$
$$L_3 \equiv 2y + 5x - 10 = 0.$$

Es soll ein Kegelschnitt bestimmt werden, der von der X-Achse berührt wird, der ferner L_1 und L_2 zu Tangenten hat, so daß L_3 Polare des Schnittpunktes von L_1 und L_2 ist.

673. Von einem beliebigen Punkte eines Kegelschnittes sind auf zwei feste Tangenten und die Polare des Durchschnittspunktes der letzteren Lote gefällt. Wie verhält sich das Rechteck aus den beiden ersten Loten zum Quadrate über dem dritten Lote?

674. Es soll die Gleichung der Polaren des Punktes P bezüglich eines Kegelschnittes bestimmt werden für den Fall, daß der Punkt P auf der unendlich fernen Geraden liegt. In welchem Verhältnis wird jede nach dem unendlich fernen Pol gerichtete Sehne des Kegelschnittes durch die Polare geteilt? (Durchmesser.)

675. Es ist zu zeigen, daß die Durchmesser eines Kegelschnittes ein Büschel bilden. Wo liegt der Mittelpunkt des Büschels?

676. Gegeben ist die Gleichung eines Durchmessers eines Kegelschnittes $y - y_0 = M\,(x - x_0)$, wo x_0, y_0 die Koordinaten des Mittelpunktes sind. Welches ist die Gleichung des konjugierten Durchmessers?

677. Es sollen die Gleichungen der Durchmesser eines Kegelschnittes bestimmt werden, welche den Asymptoten desselben konjugiert sind.

678. Welches sind die Gleichungen der konjugierten Durchmesser eines Kegelschnittes, die sich rechtwinklig durchschneiden?

Das Kegelschnittbüschel.

679. Gegeben sind die beiden Kegelschnitte

$$U_1 \equiv A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv A_2x^2 + 2B_2xy + C_2y^2 + 2D_2x + 2E_2y + F_2 = 0.$$

In wieviel Punkten schneiden sich dieselben? Welcher Gleichung entsprechen alle Kegelschnitte, die durch die Schnittpunkte der gegebenen Kurven $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ hindurchgehen?

680. Es sollen die Parabeln bestimmt werden, welche zu dem Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$ gehören. Es sei

$$U_1 \equiv A_1 x^2 + 2 B_1 xy + C_1 y^2 + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0,$$
$$U_2 \equiv A_2 x^2 + 2 B_2 xy + C_2 y^2 + 2 D_2 x + 2 E_2 y + F_2 = 0.$$

Beispiel. $U_1 \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0,$
$U_2 \equiv 3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0.$

681. Wie viele Geradenpaare enthält das Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$?

682. Welche Geradenpaare gehören zu dem Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$, wenn

$$U_1 \equiv 13x^2 + 3xy - 16y^2 - 42x + 39y - 5 = 0,$$
$$U_2 \equiv 5x^2 + 10y^2 - 27x - 57y + 65 = 0$$

ist?

683. Welcher Bedingung müssen die Konstanten in den Gleichungen der Fundamentalkurven des Kegelschnittbüschels $U_1 + k U_2 = 0$ genügen, wenn zu den Kurven des Büschels ein Kreis gehören soll?

684. Wie viele Kegelschnitte des Büschels $U_1 + k U_2 = 0$ werden von der X-Achse, wie viele von der Y-Achse berührt?

685. Gegeben sind 4 Punkte, von denen einer der Höhenpunkt des Dreiecks der 3 anderen ist. Welche Winkel schließen die Asymptoten des durch die 4 Punkte bestimmten Kegelschnittbüschels ein? Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte?

686. Gegeben ist ein Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die zu diesem Büschel gehören?

Beispiel. $U_1 \equiv 3x^2 - 4xy + 5y^2 - 30x - 16y - 20 = 0,$
$U_2 \equiv 4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0.$

687. Gegeben ist das Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$ und der Punkt $P(x_1, y_1)$. Wie liegen die Polaren des Punktes P bezüglich der Kurven des Büschels?

688. Durch das Kegelschnittbüschel $U_1 + k U_2 = 0$ ist eine Transversale S gelegt. Es ist zu zeigen, daß die Punkte, in denen die Kegelschnitte von der Transversale geschnitten werden, eine involutorische Punktreihe bilden.

689. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge als Polare bezüglich der Kegelschnitte des Büschels $U_1 + kU_2 = 0$ betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

Beispiel. $U_1 \equiv 4x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y + 3 = 0,$
$U_2 \equiv x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0.$

Die Gleichung der Geraden ist: $5x - y + 4 = 0$.

690. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die gegebene Gerade eine gemeinsame Sehne der Kegelschnitte des Büschels ist?

691. Gegeben ist ein Kegelschnitt $U_1 = 0$, die Tangente $L_1 = 0$ desselben im Punkte $P_1\ (x_1, y_1)$ und eine Sekante $L_2 = 0$. Welcher Gleichung entspricht das Büschel aller Kegelschnitte, welche von $L_1 = 0$ im Punkte P_1 berührt werden und durch die Schnittpunkte von $U_1 = 0$ und $L_2 = 0$ hindurchgehen?

692. Gegeben sind: der Kegelschnitt

$$U_1 \equiv 4x^2 + 2xy - y^2 - 4x - 8y - 11 = 0,$$

eine Tangente desselben $L_1 \equiv 3x + y - 3 = 0$ und eine Sekante $L_2 \equiv 2x - y - 1 = 0$. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes bestimmt werden, der mit U_1 in demselben Punkte von L_1 berührt wird, ferner durch die Schnittpunkte von U_1 und L_2 und endlich durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

693. Der Kegelschnitt $U_1 = 0$ wird von der Geraden $L_1 = 0$ im Punkte $P_1\ (x_1, y_1)$ und von der Geraden $L_2 = 0$ im Punkte $P_2\ (x_2, y_2)$ berührt. Es soll die Gleichung eines Büschels von Kegelschnitten bestimmt werden, welche U_1 in P_1 und P_2 berühren.

694. Die Hyperbel $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$ wird von der Geraden $5x - y - 2 = 0$ in den beiden Punkten P_1 und P_2 geschnitten. Es soll die Gleichung einer Parabel bestimmt werden, welche die Hyperbel in den beiden Punkten P_1 und P_2 berührt.

695. Ein System von Kegelschnitten berühre sich in einem Punkte P und habe außerdem den Mittelpunkt O gemeinsam. Welches ist der geometrische Ort für die Brennpunkte des Systems?

Konstruktionsaufgaben.

696. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes sind die beiden Brennpunkte F_1 und F_2, sowie die Tangente t gegeben.

697. Von einem Kegelschnitte sind die beiden Brennpunkte F_1, F_2 und ein Punkt P gegeben. Die Konstruktion ist auszuführen.

698. Man kennt von einem Kegelschnitte die Lage eines Brennpunktes F_1, sowie die dreier Tangenten t_1, t_2, t_3. Wie läßt sich die Konstruktion desselben ausführen?

699. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, wenn ein Punkt desselben P, ein Brennpunkt F_1 und zwei Tangenten t_1 und t_2 gegeben sind.

700. Gegeben sind von einem Kegelschnitte zwei Punkte P_1 und P_2, der Brennpunkt F_1 und eine Tangente t_1. Der Kegelschnitt ist zu konstruieren.

701. Durch die Punkte P_1, P_2, P_3 ist ein Kegelschnitt zu legen, welcher den Punkt F_1 zum Brennpunkte hat.

702. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes sind gegeben: der eine Brennpunkt F_1, der nächstliegende Scheitel A_1 und die Tangente t_1.

703. Es soll ein Kegelschnitt gezeichnet werden, von dem der Brennpunkt F_1, die beiden Tangenten t_1 und t_2 und die Richtung der Hauptachse bekannt sind.

704. Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist ein Kegelschnitt zu legen, der den Punkt F_1 zum Brennpunkte und eine Hauptachse von der Länge $2a$ hat.

705. Gegeben sind von einem Kegelschnitte der eine Brennpunkt F_1, die zugehörige Direktrix d_1 und eine Tangente t_1. Der Kegelschnitt ist zu konstruieren.

706. Von einem Kegelschnitte kennt man einen Punkt P, eine Tangente t_1 mit dem Berührungspunkte P_1 und eine Direktrix d_1. Wie findet man den der Direktrix zugehörigen Brennpunkt?

707. Ein Kegelschnitt soll konstruiert werden, welcher durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht, die Strecke $P_1 P_2$ zum Durchmesser und die Gerade d_1 zur Direktrix hat.

708. Um den Mittelpunkt O ist ein Kegelschnitt zu beschreiben, welcher die Gerade d zur Direktrix hat, so daß die Gerade p Polare des Punktes P bezüglich der Kurve wird.

709. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, der durch den Punkt P geht und die Gerade d_1 zur Direktrix hat, und zwar möge die Gerade p_1 Polare des Punktes P_1 bezüglich der Kurve sein.

710. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gegeben. Zu finden sind: a) ein sechster Punkt der Kurve, b) der Mittelpunkt.

711. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 gegeben. Wie lassen sich die Tangenten konstruieren, die den Kegelschnitt in diesen fünf Punkten berühren?

712. Gegeben sind von einem Kegelschnitte die Punkte P_1, P_2, P_3, eine Tangente t und der Berührungspunkt derselben P_4. Es soll ein fünfter Punkt desselben durch Konstruktion gefunden werden.

713. Zur Konstruktion einer Hyperbel sind gegeben 2 Punkte P_1 und P_2, die Richtung der einen Asymptote, eine Tangente t und deren Berührungspunkt P_3.

714. Ein Kegelschnitt möge von der Geraden t_1 im Punkte P_1, von der Geraden t_2 im Punkte P_2 berührt werden. Wie läßt sich im Punkte P_3 an denselben eine Tangente legen?

715. Fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 eines Kegelschnittes sind der Lage nach gegeben. Es soll eine sechste Tangente desselben durch Konstruktion gefunden werden.

716. Von einem Kegelschnitte sind fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 gegeben. Es sollen die Berührungspunkte dieser fünf Tangenten bestimmt werden.

717. Von einem Kegelschnitte sind fünf Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 gegeben. Wie läßt sich die Lage des Mittelpunktes durch Konstruktion ermitteln?

718. Gegeben sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und der Mittelpunkt O eines Kegelschnittes. Wie läßt sich die Kurve konstruieren?

719. Von einem Kegelschnitte sind drei Tangenten t_1, t_2, t_3 und die Berührungspunkte der beiden ersten P_1, P_2 gegeben. Der Berührungspunkt der dritten Tangente soll gesucht werden.

720. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes sind vier Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4 und der Berührungspunkt P_1 der einen gegeben.

721. Zur Konstruktion einer gleichseitigen Hyperbel sind vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 gegeben.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.